Nachrichten

von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1921

BERLIN
Weidmannsche Buchhandlung
1921

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)
in Göttingen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1921.

Seite

Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern.

Von

E. Hecke (Hamburg).

Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Dezember 1920.

Die klassische Methode zur Bestimmung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers besteht bekanntlich darin, daß diese Klassenzahl auf das Residuum der Zetafunktion des Körpers in ihrem Pole zurückgeführt wird. In einigen wenigen Fällen läßt sich nun dieses Residuum auf Grund der Zerlegungsgesetze für Primzahlen in diesen Körpern ermitteln und damit ein Ausdruck für die Klassenzahl gewinnen, der in der Hauptsache neben den Grundeinheiten gewisse *ausgezeichnete Einheiten* des Körpers enthält, und zwar sind das nur folgende Fällle:

a) Die Kreiskörper und deren Unterkörper, d. h. alle absolut-Abelschen Körper.

b) Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen, d. h. die Körper, welche relativ-Abelsch in bezug auf einen imaginär quadratischen Körper sind.

Jene ausgezeichneten Einheiten, welche in den Formeln auftreten, sind algebraische Zahlen, welche mit Hilfe analytischer Funktionen, der Exponentialfunktion bezw. einer elliptischen Modulfunktion, also auf transzendentem Wege definiert sind. Ein besonderes Interesse beansprucht der einzige Fall, wo die Einheiten nicht auftreten, der Fall der imaginär-quadratischen Körper. Ihre Klassenzahl findet man auf dem obigen Wege als elementare arithmetische Funktion der Diskriminante d ausgedrückt, nämlich (in den üblichen Bezeichnungen von Hilberts Zahlbericht)

$$(1) \qquad h = -\frac{w}{2|d|} \sum_{n=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{n}\right) n.$$

Das sind also die einzigen bisher bekannten Formeln für eine Klassenzahl, in welche keine transzendenten Funktionen eingehen.

Zieht man noch Relativ-Klassenzahlen (Quotienten aus Klassenzahl eines Körpers und eines seiner Unterkörper) mit in Betracht, so sind in diesem Zusammenhang auch noch die sog. ersten Faktoren der Klassenzahl der Kreisteilungskörper, wie sie Kummer aufgestellt hat, zu nennen.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man die Klassenzahl nicht auf Grund der tieferen Kenntnisse, die man heute über die analytische Natur der Zetafunktionen hat, auch noch in anderen Fällen berechnen kann. In dieser Richtung habe ich vor einigen Jahren im Anschluß an die sog. Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper skizziert, wie man in der Tat den Wert der in Frage kommenden L-Funktionen mit den neueren analytischen Hilfsmitteln noch weiter in einer bestimmten Richtung umformen kann. Wenn ich auch glaube, daß die Weiterentwickelung dieser Ansätze schließlich das endgültige Ergebnis einmal liefern wird, so sind doch diese Resultate noch sehr unbefriedigend, weil wir über die zahlentheoretische Bedeutung dieser umgeformten Ausdrücke, ihre Beziehung zu irgendwie ausgezeichneten Einheiten noch ganz im Unklaren sind — abgesehen von bisher zwei Fällen. Über den einen, meiner Ansicht nach wichtigeren, werde ich in anderem Zusammenhang berichten. Der zweite ist Gegenstand dieser Arbeit. Ich stelle folgendes Theorem auf:

Es sei k ein total reeller Körper, δ eine total (d. h. nebst sämtlichen Konjugierten) negative Zahl aus k. Dann bestimmt $\sqrt{\delta}$ einen Relativkörper K, welcher quadratisch bezüglich k und total imaginär ist. Der Quotient der beiden Klassenzahlen H und h von K bezw. k ist dann als elementare arithmetische Funktion von δ darstellbar, von analoger Beschaffenheit wie die rechte Seite von (1).

Heuristische Gründe für die Richtigkeit dieses Satzes lassen sich leicht angeben, vor allem die Tatsache, daß die Anzahl der unabhängigen Einheiten in K wie in k die gleiche ist und daß daher die Regulatoren der beiden Körper in einem rationalen Verhältnis stehen.

Nach Ausführung der bekannten Umformungen der $\zeta_K(s)$ stellt sich gleich eine nicht unerwartete Schwierigkeit ein, nämlich die Notwendigkeit, eine Gaußsche Summe allgemeiner Art zu bestimmen. Diese allgemeinen Gaußschen Summen sind von mir bereits definiert worden, und ich habe auch ge-

zeigt[1]), wie man mit Hilfe der Theorie der Thetafunktionen ihr Vorzeichen bestimmen kann, wenn der Körper (im obigen Falle der Körper k) total reell ist. In allen übrigen Fällen ist diese Methode nicht anwendbar. Ich gebe im Folgenden (§ 1) einen neuen Weg zur Vorzeichenbestimmung aller Gaußschen Summen, der ohne Unterschied bei allen Körpern zum Ziel führt, und der mir bei weitem befriedigender erscheint. Der Wert der Gaußschen Summen in einem Körper k ergibt sich nämlich unmittelbar aus der Funktionalgleichung der Zetafunktionen von k und von einem geeigneten relativquadratischen Körper K in Verbindung mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz in k. Diese Methode scheint mir auch in dem klassischen Falle der einfachen Gaußschen Summe eine dem Wesen des Problems angemessenere zu sein, da sie als einziges transzendentes Element eben nur die Zetafunktionen benutzt und diese also sowohl die Klassenzahlbestimmung, wie auch die der Gaußschen Summen leisten.

Das oben ausgesprochene Theorem beweise ich in der vorliegenden Arbeit für den reellen quadratischen Körper k. Da die Klassenzahl von k bekannt ist, wird also hierdurch die Klassenzahl eines jeden Körpers 4. Grades $K = K(\sqrt{a+b\sqrt{m}})$ gegeben, wo a, b, m rational, $m > 0$, $a+b\sqrt{m} < 0$, $a-b\sqrt{m} < 0$. In speziellen Fällen, z. B. $k = k(\sqrt{3})$, wird die Schlußformel besonders einfach. (Vgl. am Schluß die Gl. (29)).

Die im Verlaufe des Beweises sich ergebenden Zusammenhänge sind nun höchst überraschend. Die Klassenzahl erscheint nämlich eng verknüpft mit einer tiefliegenden Frage aus der Theorie der Thetafunktionen einer Variabeln, und zwar der Frage, wie sich eine eindeutige analytische Funktion der komplexen Variabeln τ wie (vgl. Gl. (14))

$$f(\tau) = \log \vartheta_{11}\left(\frac{\tau}{n}, \tau\right)$$

bei gewissen Modulsubstitutionen verhält. (τ ist dabei die Periode der Thetafunktion, n eine ganze rationale Zahl, die mit der Relativdiskriminante zusammenhängt). Diese unerwartete Tatsache ist umso bemerkenswerter, als einmal im Verlaufe der Rechnung die Funktion $f(\tau)$ nicht etwa nur für einen speziellen Zahlwert τ, sondern für stetig veränderliches τ auftritt, und zweitens hier wohl zum ersten Male seit den Untersuchungen von St. Smith

1) Reziprozitätsgesetz und Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern. Diese Nachr. 1919.

wieder Zusammenhänge zwischen Thetafunktionen einer Variabeln und dem reellen quadratischen Zahlkörper festgestellt werden.

Jene Frage nach dem Verhalten von $f(\tau)$ ist meines Wissens bisher in der Theorie der elliptischen Funktionen noch nicht behandelt worden. Ihre Beantwortung geht über die gewöhnlichen Aussagen, das Verhalten der Thetas bei Modulsubstitutionen betreffend, offenbar wesentlich hinaus. Die Methode, die Frage zu entscheiden, ist im Prinzip naheliegend; sie besteht darin, $\log f(\tau)$ und das transformierte $\log f(\tau)$ in der Nähe eines rationalen Wertes τ asymptotisch zu entwickeln. Für die Differenz ergibt sich dann eine merkwürdige elementar-arithmetische Funktion der Transformationskoeffizienten. Ich möchte noch darauf hinweisen, daß eine verwandte Frage einmal von Dedekind[1]) behandelt wird gelegentlich der Ausführung einiger Notizen aus dem Nachlaß Riemanns über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen; es handelt sich da um das Verhalten von $\log \eta(\tau)$ bei Modulsubstitutionen.

§ 1.

Bestimmung der Gaußschen Summe in k.

In dem total reellen Körper k sei δ eine total negative ganze Zahl. Die Relativdiskriminante des relativ-quadratischen Körpers $K = K(\sqrt{\delta})$ sei $\mathfrak{d}$. Wir definieren alsdann zunächst für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in k einen quadratischen Restcharakter in folgender Art:

1) $Q(\mathfrak{p}) = 0$, wenn $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{d}$ aufgeht.

2) Geht $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{d}$ auf, so läßt sich δ durch Multiplikation mit einer geeigneten Quadratzahl in eine Zahl δ^* verwandeln, die durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbar. Alsdann sei

$$Q(\mathfrak{p}) = \left(\frac{\delta^*}{\mathfrak{p}}\right),$$

wobei dieses Symbol das quadratische Restsymbol in k bedeutet. Geht dabei $\mathfrak{p}$ in 2 genau zu Potenz $\mathfrak{p}^c$ auf, so ist, wie üblich, die Definition dieses Symbols die:

$$\left(\frac{\delta^*}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

wenn $\delta^* \equiv \xi^2 \pmod{\mathfrak{p}^{2c+1}}$ in k lösbar, sonst

$$\left(\frac{\delta^*}{\mathfrak{p}}\right) = -1.$$

1) Vgl. Riemanns ges. math. Werke, herausg. v. Weber (1876), S. 438 ff.

3) Für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots$ werde dann gesetzt

$$Q(\mathfrak{a}) = Q(\mathfrak{p}_1)^{a_1} \cdot Q(\mathfrak{p}_2)^{a_2} \ldots,$$

sodaß also stets

$$Q(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{a}) \cdot Q(\mathfrak{b}).$$

Für ein Hauptideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ schreiben wir

$$Q(\mathfrak{a}) = Q(\alpha),$$

also für jede Einheit ε in k

$$Q(\varepsilon) = 1, \quad Q(\varepsilon\alpha) = Q(\alpha).$$

Auf Grund des quadratischen Reziprozitätsgesetzes ist nun

$$Q(\alpha) = +1,$$

wenn $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{d}}$ und α total positiv.

Also allgemeiner

$$Q(\mathfrak{a}) = Q(\mathfrak{b}),$$

wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in dieselbe Idealklasse mod. $\mathfrak{d}$ gehören im Sinne des engsten Äquivalenzbegriffes.

Hieraus folgt, daß $Q(\mathfrak{a})$ ein Klassencharakter des Ideals $\mathfrak{a}$ bezüglich der durch diese Klasseneinteilung bestimmten Abelschen Gruppe ist. In der Bezeichnung meiner früheren Arbeit[1]) ist $Q(\mathfrak{a})$ also eine Funktion $\chi_0(\mathfrak{a})$. Der zu diesem χ_0 gehörige „Vorzeichencharakter" $v(\mathfrak{a})$ läßt sich leicht angeben. Auf Grund des quadratischen Reziprozitätsgesetzes ist nämlich genauer noch

$$Q(\alpha) \operatorname{sgn} N(\alpha) = +1$$

wenn

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{d}},$$

da δ eine total negative Zahl sein soll. Hiernach ist also $Q(\alpha) \cdot \operatorname{sgn} N(\alpha)$ ein Restklassencharakter mod. $\mathfrak{d}$ hinsichtlich des weitesten Äquivalenzbegriffes; es gibt also eine Funktion $\chi(\alpha)$ (in der früheren Bezeichnung) so daß für jede ganze Körperzahl α

$$Q(\alpha) = \chi(\alpha) \operatorname{sgn} N(\alpha) = \chi(\alpha) \frac{N(\alpha)}{|N(\alpha)|}.$$

Hierin bedeutet $\chi(\alpha)$ einen (reellen) Klassencharakter für die Restklassen mod. $\mathfrak{d}$. Da Q nur vom Ideal (α) abhängt, ist insbesondere

$$\chi(\varepsilon) = N(\varepsilon)$$

für jede Einheit ε von k. Die „Exponenten" des Charakters χ_0,

1) Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. 2. Mitteilg. Math. Zeitschr. Bd. 6 (1920), S. 19 u. 20.

welche ich früher $a_1, a_2, \ldots a_{r_1}$ nannte, haben also hier sämtlich den Wert 1.

Mit Hilfe dieses Zahlcharakters $\chi(\alpha)$ bilden wir nun folgende Summe, in Verallgemeinerung der bekannten Gaußschen Summe: Es sei $\varkappa$ eine gebrochene Zahl aus k mit dem Nenner $\mathfrak{d}.\mathfrak{d}_0$, wo $\mathfrak{d}_0$ die Differente oder das Grundideal von k ist,

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0}.$$

Alsdann werde gesetzt

$$C(\varkappa) = \sum_{\lambda} \chi(\lambda) e^{2\pi i S(\lambda\varkappa)}.$$

$S(\alpha)$ bedeutet dabei die Spur von α in k und λ durchläuft ein vollständiges Restsystem mod. $\mathfrak{d}$. Da χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{d}$ ist, so ist diese Summe Null, wenn das Zählerideal $\mathfrak{k}$ von $\varkappa$ zu $\mathfrak{d}$ nicht teilerfremd ist, andernfalls hat sie, wie sich auch elementar zeigen läßt, den Betrag $|\sqrt{N(\mathfrak{d})}|$. Für jedes ganze μ ist daher

$$C(\mu\varkappa) = \chi(\mu) C(\varkappa)$$

und folglich hat

$$\operatorname{sgn} N(\varkappa) \cdot \chi_0(\mathfrak{k})\, C(\varkappa) = \operatorname{sgn} N(\varkappa) \left(\frac{\delta^*}{\mathfrak{k}}\right) C(\varkappa)$$

für alle zu $\mathfrak{d}$ primen Ideale $\mathfrak{k}$ den gleichen, nur von $\mathfrak{d}$ abhängigen Wert. Wir setzen im Anschluß an meine früheren Bezeichnungen, wobei $(\mathfrak{k}, \mathfrak{d}) = 1$,

$$(2) \qquad W(\chi_0) = \frac{1}{|\sqrt{N(\mathfrak{d})}|} \operatorname{sgn} N(\varkappa)\, \chi_0(\mathfrak{k})\, C(\varkappa).$$

Die Bestimmung dieses $W(\chi_0)$, das nach dem Obigen den Betrag 1 hat, geschieht aus der Funktionalgleichung der zugehörigen L-Funktion.

Wie in der oben zitierten Arbeit nachgewiesen, genügt nämlich die Funktion

$$\xi(s, \chi_0) = A^s \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^m L(s, \chi_0),$$

worin

$$A = |\sqrt{N(\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0)\pi^{-m}}|,$$

$$L(s, \chi_0) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi_0(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s},$$

der Funktionalgleichung

$$\xi(1-s, \bar{\chi}_0) = \xi(1-s, \chi_0) = (-i)^m W(\chi_0)\, \xi(s, \chi_0).$$

Denn der Körper k ist total reell vom Grade m und die „Exponenten" des Charakters χ_0 sind sämtlich $= 1$.

Andererseits aber ist nach bekannten Prinzipien die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{\delta})$ so darstellbar:

$$\zeta_K(s) = \zeta_k(s) \,.\, L(s, \chi_0)$$

und hierin haben auch die beiden ζ-Funktionen die Funktionaleigenschaft:

$$A_K^s \Gamma(s)^m \zeta_K(s)$$

und

$$A_k^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^m \zeta_k(s)$$

ändern sich nicht, wenn man s durch $1-s$ ersetzt. Dabei ist

$$A_K = \left|\sqrt{N_K(\mathfrak{d}_K)\,\pi^{-2m}\,2^{-2m}}\right|$$

$$A_k = \left|\sqrt{N(\mathfrak{d}_0)\,\pi^{-m}}\right|$$

und $N_K(\mathfrak{d}_K)$ die Norm der Differente $\mathfrak{d}_K$ von K im Körper K. Wegen

$$\mathfrak{d}_K = \mathfrak{d}_0 \,.\, \sqrt{\mathfrak{d}}$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)$$

folgt aus den drei Funktionalgleichungen

$$(-i)^m\, W(\chi_0) = 1,$$

also

$$C(\varkappa) = i^m \operatorname{sgn} N(\varkappa)\left(\frac{\delta^*}{\mathfrak{k}}\right)\cdot\left|\sqrt{N(\mathfrak{d})}\right|.$$

Diese Größe wird nachher bei der Klassenzahlbestimmung so Verwendung finden, als mit ihrer Hilfe sich eine Darstellung des Charakters $\chi(\mu)$ ergibt

$$\chi(\mu) = \frac{1}{C(\varkappa)}\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\, e^{2\pi i\, S(\lambda\mu\varkappa)}. \tag{3}$$

Diese auf der Funktionalgleichung basierende Methode zur Bestimmung der Gaußschen Summe in k ist offenbar für jeden beliebigen Grundkörper k andwendbar, falls das quadratische Reziprozitätsgesetz für ihn als bekannt vorausgesetzt wird.

Im übrigen ist für die Klassenzahlbestimmung vor allem die letzte Gleichung (3) wesentlich, d. h. die Tatsache, daß

$$|C(\varkappa)| = \left|\sqrt{N(\mathfrak{d})}\right| \neq 0;$$

die folgenden Berechnungen liefern den Wert von $HC(\varkappa)$.

§ 2.

Zurückführung der Klassenzahl auf die L-Funktion.

Wir nehmen von jetzt ab an, daß der Grundkörper k ein reeller quadratischer Körper der Diskriminante d ist, also $m = 2$. Die Klassenzahl H von K ist nach Dedekind durch die Formel bestimmt

$$H = \frac{1}{\mathsf{K}} \lim_{s=1} (s-1)\zeta_K(s),$$

worin

$$\mathsf{K} = \frac{4\pi^2}{w} \frac{R}{|d\sqrt{N(\mathfrak{d})}|} = \frac{8\pi^2}{w} \frac{\log|E|}{|d\sqrt{N(\mathfrak{d})}|}.$$

w ist die Anzahl der Einheitswurzeln in K und E eine solche Grundeinheit in K, deren Betrag > 1 ist. Ist ε (> 1) die positive Grundeinheit in k, so ist entweder

$$|E| = |\sqrt{\varepsilon}|$$

oder

$$|E| = \varepsilon.$$

Analog ist in k

$$h = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1)\zeta_k(s),$$

$$\varkappa = \frac{2\log\varepsilon}{\sqrt{d}}.$$

Wie schon im vorangehenden Paragraphen benutzt, ist aber

$$\zeta_K(s) = \zeta_k(s) L(s, \chi_0),$$

also

$$H = h \cdot \frac{\varkappa}{\mathsf{K}} L(1, \chi_0) = h \cdot \frac{w_1}{4\pi^2} |\sqrt{d N(\mathfrak{d})}| L(1, \chi_0) \tag{4}$$

worin w_1 = Anzahl der Einheitswurzeln in K, wenn ε auch Grundeinheit in K, sonst w_1 = der doppelten Anzahl der Einheitswurzeln in K.

Die Bestimmung des Quotienten $\frac{H}{h}$ ist damit auf die Bestimmung von $L(1, \chi_0)$ zurückgeführt.

Wir verstehen jetzt unter $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_h$ ein System von Repräsentanten der Idealklassen von k, die überdies sämtlich zu $\mathfrak{d}$ prim vorausgesetzt werden. Sodann setzen wir

$$L(s, \mathfrak{a}_l) = \sum_{(\mu) \equiv 0(\mathfrak{a}_l)}' \frac{\chi_0(\mu)}{|N(\mu)|^s}.$$

Darin durchläuft μ sämtliche nicht assoziierten Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}_l$ außer Null. Hiermit wird

$$L(s, \chi_0) = \sum_{l=1}^{h} \chi_0(\mathfrak{a}_l) N(\mathfrak{a}_l)^s L(s, \mathfrak{a}_l).$$

Die weitere Umformung von $L(s, \mathfrak{a}_l)$ — der Index l soll weiterhin der Übersichtlichkeit halber wegbleiben — geschieht nun zunächst durch Zurückführung auf gewisse „Zetafunktionen zweiter Ordnung“, Summen, deren allgemeines Glied die s-te Potenz einer binären definiten quadratischen Form der Summationsbuchstaben ist.

§ 3.

Überführung von $L(1, \chi_0)$ in Potenzreihen.

Zunächst ist nun

$$L(s, \mathfrak{a}) = \sum_{(\mu)}' \frac{\chi(\mu) \operatorname{sgn} \mu\mu'}{|N(\mu)|^s} = \sum_{(\mu)}' \chi(\mu)\, \mu\mu' \cdot \frac{1}{|N(\mu)|^{s+1}}.$$

$$\frac{1}{|N(\mu)|^{s+1}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2} \int_0^{\infty}\!\!\int e^{(t\mu^2 + t'\mu'^2)} (tt')^{\frac{s-1}{2}}\, dt\, dt'.$$

Durch die Substitution

$$t = ue^{2v}, \quad t' = ue^{-2v}$$

wird daraus

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}{|N(\mu)|^{s+1}} = 4 \int_{u=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-u(\mu^2 e^{2v} + \mu'^2 e^{-2v})\right\} u^s\, du\, dv$$

$$= 4\Gamma(s+1) \int_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(\mu^2 e^{2v} + \mu'^2 e^{-2v})^{s+1}}.$$

Unter Heranziehung der Grundeinheit ε erhalten wir durch die bekannte Umformung

$$L(s, \mathfrak{a}) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}{\Gamma(s+1)} = 2 \int_0^{\log \varepsilon} \sum_{\mu}' \chi(\mu)\, \mu\mu' (\mu^2 e^{2v} + \mu'^2 e^{-2v})^{-s-1}\, dv.$$

Hier durchläuft jetzt μ sämtliche durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Zahlen außer Null. Unter Benutzung der Darstellung von $\chi(\mu)$ nach (3), wobei $\varkappa$ eine gebrochene Zahl mit Nenner $\mathfrak{d}\sqrt{d}$ und $\varkappa\mathfrak{d}\sqrt{d} = \mathfrak{k}$ zu $\mathfrak{d}$ prim, finden wir

$$(5)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}{\Gamma(s+1)}\,\frac{\log\eta}{\log\varepsilon}\,L(s,\mathfrak{a}) = \frac{2}{C(\varkappa)}\int\limits_0^{\log\eta}\sum_\lambda \chi(\lambda)\,Z(s,v,\lambda,\mathfrak{a})\,dv$$

mit

$$(6)\qquad Z(s,v,\lambda,\mathfrak{a}) = \sum_{\mu\equiv 0(\mathfrak{a})}{}' \frac{e^{2\pi i S(\lambda\mu\varkappa)}\,\mu\mu'}{(\mu^2 e^{2v}+\mu'^2 e^{-2v})^{s+1}}.$$

η ist hierbei eine total positive Einheit, über welche wir beliebig verfügen können. Aus der Definition von Z geht hervor, daß diese Funktion in v die Periode $n\log\eta$ hat, wenn $\eta^n\equiv 1\ (\text{mod. }\mathfrak{d})$, und daß jedenfalls der Integrand von (5) schon die Periode $\log\eta$ hat. Das Integral (5) kann also statt von 0 bis $\log\eta$ auch von v bis $v+\log\eta$ erstreckt werden, da es einen von v ganz unabhängigen Wert hat. Analoges gilt von dem Integral über das einzelne Z selbst. Von dieser Freiheit der Wahl von v werden wir nachher wesentlich Gebrauch machen.

Um den Wert von Z bei $s=1$ zu ermitteln, haben wir Umformungen vorzunehmen, wie sie zur Herleitung der sogenannten Kroneckerschen Grenzformel angewandt werden. Ich benutze hier bei der Untersuchung eine Methode, welche von den mir bekannten verschieden ist und den Vorteil hat, mit wesentlich weniger Rechnung auszukommen.

Ich setze nämlich

$$\mu = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2$$

wo α_1, α_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$ mit

$$(7)\qquad \Delta = \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' > 0,$$

nehme zunächst die Glieder mit $m_2 = 0$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m_1 S(\lambda\varkappa\alpha_1)} + e^{-2\pi i m_1 S(\lambda\varkappa\alpha_1)}}{m_1^{2s}}\cdot\frac{\alpha_1\alpha_1'}{(\alpha_1^2 e^{2v}+\alpha_1'^2 e^{-2v})^{s+1}},$$

während ich die Glieder mit einem $m_2 \neq 0$ als Wert der periodischen Funktion von u

$$\Phi(m_2,u) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i((m_1+u)S(\lambda\varkappa\alpha_1)+m_2 S(\lambda\varkappa\alpha_2))}((m_1+u)\alpha_1+m_2\alpha_2)((m_1+u)\alpha_1'+m_2\alpha_2')}{[((m_1+u)\alpha_1+m_2\alpha_2)^2 e^{2v}+((m_1+u)\alpha_1'+m_2\alpha_2')^2 e^{-2v}]^{s+1}}$$

an der Stelle $u=0$ auffasse. Diese Funktion Φ, wofür

$$\Phi(m_2,u+1) = \Phi(m_2,u),$$

entwickele ich sodann in eine Fourierreihe nach $e^{2\pi i u}$ und setze endlich darin $u=0$.

Für die Fourierkoeffizienten findet man leicht den Wert

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{2\pi i[u(m+S(\lambda\varkappa\alpha_1))+m_2 S(\lambda\varkappa\alpha_2)]\} \frac{(u\alpha_1+m_2\alpha_2)(u\alpha_1'+m_2\alpha_2')\,du}{[(u\alpha_1+m_2\alpha_2)^2 e^{2v}+(u\alpha_1'+m_2\alpha_2')^2 e^{-2v}]^{s+1}}$$

$$m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots,$$

sodaß also

$$\Phi(m_2, 0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m.$$

Zur Abkürzung führen wir die reellen rationalen Zahlen

$$S_1(\lambda) = S(\lambda\varkappa\alpha_1) \text{ und } S_2(\lambda) = S(\lambda\varkappa\alpha_2)$$

ein. Sie sind, wenn auch λ prim zu $\mathfrak{d}$, nicht alle beide ganz. Ferner die Nullstellen des Nenners im Integranden (wenn $m_2 = 1$)

$$\omega_1 = \frac{i\alpha_2' e^{-v} - \alpha_2 e^v}{-i\alpha_1' e^{-v} + \alpha_1 e^v}, \quad \omega_2 = \frac{-i\alpha_2' e^{-v} - \alpha_2 e^v}{i\alpha_1' e^{-v} + \alpha_1 e^v}.$$

Der Imaginärteil von ω_1 ist wegen (7) positiv. Wir führen in dem Integral jetzt

$$u' = \frac{u}{m_2}$$

als neue Variable ein und erhalten

$$A_m = \frac{e^{2\pi i m_2 S_2(\lambda)}}{|m_2|^{2s-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u\alpha_1+\alpha_2)(u\alpha_1'+\alpha_2')\exp\{2\pi i u m_2(m+S_1(\lambda))\}}{(\alpha_1^2 e^{2v}+\alpha_1'^2 e^{-2v})^{s+1}\,[(u-\omega_1)(u-\omega_2)]^{s+1}}\,du.$$

Daß die Doppelsumme über A_m nach m, m_2 wenn $m+S_1(\lambda) \neq 0$, absolut konvergiert und zwar für alle s, erkennt man leicht, wenn man den Integrationsweg in die obere oder untere Halbebene der komplexen Variabeln u (je nach dem Vorzeichen von $m_2(m+S_1(\lambda))$) umbiegt, sodaß er den Punkt ω_1 oder ω_2 umkreist.

Die Summe der Glieder, wo $m+S_1(\lambda) = 0$, der Integrand also von m_2 unabhängig, ist

$$(8) \qquad \sum_{m_2 \neq 0} \frac{e^{2\pi i m_2 S_2(\lambda)}}{|m_2|^{2s-1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots du.$$

Dieses Integral ist als Funktion von s bei $s = 1$ noch regulär. Die hiervor stehende Summe konvergiert bei $s = 1$ noch und ist nach rechts stetig, da $S_2(\lambda)$ sicher keine ganze Zahl ist, weil nach Annahme ja bereits $S_1(\lambda)$ ganz, $= -m$ ist.

Für $s = 1$ lassen sich die A_n einfach auswerten, nämlich $= 2\pi i \times$ dem Residuum des alsdann eindeutigen Integranden bei $u = \omega_1$ bezw. ω_2. Man findet für reelles σ

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \sigma u}(u\alpha_1+\alpha_2)(u\alpha_1'+\alpha_2')}{(\alpha_1^2 e^{2v}+\alpha_1'^2 e^{-2v})^2 (u-\omega_1)^2 (u-\omega_2)^2}\, du =$$

$$\begin{cases} \dfrac{i\pi^2 \sigma e^{2\pi i \sigma \omega_1}}{(-i\alpha_1' e^{-v}+\alpha_1 e^{v})^2} = -\dfrac{\pi^2 \sigma}{2\Delta} e^{2\pi i \sigma \omega_1} \dfrac{d\omega_1}{dv} & (\sigma \geqq 0) \\ \dfrac{i\pi^2 \sigma e^{2\pi i \sigma \omega_2}}{(i\alpha_1' e^{-v}+\alpha_1 e^{v})^2} = \dfrac{\pi^2 \sigma}{2\Delta} e^{2\pi i \sigma \omega_2} \dfrac{d\omega_2}{dv} & (\sigma \leqq 0). \end{cases}$$

Die ganze Reihe (9) wird daher bei $s = 1$ zu Null. Damit erhalten wir schließlich

$$Z(1, v; \lambda, \mathfrak{a}) = \frac{2\alpha_1\alpha_1'}{(\alpha_1^2 e^{2v}+\alpha_1'^2 e^{-2v})} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m S_1(\lambda)}{m^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{2\Delta}\frac{d\omega_1}{dv} \sum_{m_2(m+S_1)>0} \frac{m_2(m+S_1(\lambda))}{|m_2|} e^{2\pi i[m_2 S_2(\lambda) + m_2\omega_1(m+S_1(\lambda))]}$$

$$-\frac{\pi^2}{2\Delta}\frac{d\omega_2}{dv} \sum_{m_2(m+S_1)<0} \frac{m_2(m+S_1(\lambda))}{|m_2|} e^{2\pi i[m_2 S_2(\lambda) + m_2\omega_2(m+S_1(\lambda))]}.$$

Dabei ist λ als ganze zu $\mathfrak{d}$ prime Zahl angenommen. Das zweite und dritte Glied in diesem Ausdruck für Z sind offenbar konjugiert imaginär.

Unbestimmte Integration nach v ergibt für das erste Glied

$$\mathrm{I} = -\frac{\alpha_1' e^{-2v}}{2\alpha_1(\alpha_1^2 e^{2v}+\alpha_1'^2 e^{-2v})} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m S_1(\lambda)}{m^2}$$

und für das zweite Glied

$$\mathrm{II} = -\frac{\pi}{4i\Delta} \sum_{m_2(m+S_1)>0} \frac{1}{|m_2|} e^{2\pi i m_2[S_2+(m+S_1)\omega]} + \text{const.},$$

worin

$$\omega = \omega_1 = \omega(v) = \frac{i\alpha_2' e^{-v} - \alpha_2 e^{v}}{-i\alpha_1' e^{-v} + \alpha_1 e^{v}}.$$

Wir verstehen jetzt für reelles x unter $R(x)$ den kleinsten nichtnegativen Rest von x mod. 1, d. h. diejenige Zahl, wofür

$$x - R(x) \text{ ganz rational}$$
$$0 \leqq R(x) < 1.$$

Hierfür gilt

$$R(x+1) = R(x), \quad R(R(x) \pm R(y)) = R(x \pm y).$$

ferner noch

$$R(-x) = 1 - R(x), \text{ wenn } R(x) \neq 0.$$

Überdies besteht noch die Fourierentwickelung

$$(9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} = \begin{cases} \pi\left(\frac{1}{2} - R(x)\right), \text{ wenn } R(x) \neq 0, \\ -\pi \dfrac{R(x) - R(-x)}{2} \text{ für jedes } x. \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2} = \pi^2\left(\tfrac{1}{6} - R(x) + R^2(x)\right) \text{ für jedes } x.$$

Unter Benutzung der Abkürzungen

$$R_1 = R(S_1(\lambda)) = R(S(\lambda \varkappa \alpha_1))$$
$$R_2 = R(S_2(\lambda)) = R(S(\lambda \varkappa \alpha_2))$$

läßt sich dann II unter geeigneter Fixierung der Konstanten so schreiben

$$\mathrm{II} = -\frac{\pi}{4\Delta} F(\omega, \lambda).$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} F(\omega, \lambda) = \frac{1}{i} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m n \omega}}{n} \left\{ e^{2\pi i n(\omega R_1 - R_2)} - e^{-2\pi i n(\omega R_1 - R_2)} \right\} \\ + \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n(\omega R_1 - R_2)}}{n}. \end{aligned}$$

Für den in I auftretenden Faktor gilt noch

$$-\frac{\varepsilon_2 e^{-2r}}{\varepsilon_1(\varepsilon_1^2 e^{2r} + \varepsilon_2^2 e^{-2r})}\Bigg|_r^{r + \log\eta} = \frac{1}{\Delta} \Re(\omega)\Bigg|_r^{r + \log\eta}.$$

Somit ist

$$\int_r^{r + \log\eta} \sum_\lambda \chi(\lambda) Z(1, r, \lambda, \mathfrak{a})\, dr$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \Re(\omega)\Bigg|_r^{r + \log\eta} \sum_\lambda \chi(\lambda) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m R_1}{m^2}$$

$$- \frac{\pi}{2\Delta} \sum_\lambda \chi(\lambda) \Re(F(\omega, \lambda))\Bigg|_r^{r + \log\eta}$$

und zwar ist dies nach dem früheren von r ganz unabhängig.

Nun sind $\omega(r)$ und

$$\omega(r + \log\eta) = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

äquivalent nach der Modulgruppe; denn es gibt, weil η eine Einheit mit Norm $+1$, vier ganze Zahlen a, b, c, d so, daß

$$\begin{aligned} d\alpha_1 - c\alpha_2 &= \eta\alpha_1 \\ -b\alpha_1 + a\alpha_2 &= \eta\alpha_2 \end{aligned} \qquad ad - bc = +1, \tag{11}$$

und hierfür ist

$$\omega(v + \log\eta) = \frac{a\omega(v) + b}{c\omega(v) + d}.$$

Sie haben übrigens die Werte

$$a = \frac{-\eta\alpha_1'\alpha_2 + \eta'\alpha_1\alpha_2'}{\varDelta}, \quad b = -\frac{\eta - \eta'}{\varDelta}\alpha_2\alpha_2'$$

$$c = \frac{\eta - \eta'}{\varDelta}\alpha_1\alpha_1', \qquad d = \frac{\eta\alpha_1\alpha_2' - \eta'\alpha_1'\alpha_2}{\varDelta}.$$

So erhalten wir schließlich für den Klassenzahlquotienten unter Benutzung von (4)

$$\frac{H}{h} = \frac{-\operatorname{sgn} N(\varkappa)\chi_0(\mathfrak{k}).w_1}{4}\,\frac{\log\varepsilon}{\log\eta}\sum_{l=1}^{h}\chi_0(\mathfrak{a}_l).\Phi(\mathfrak{a}_l); \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{a}_l) = &\sum_{\lambda \bmod \mathfrak{b}} \chi(\lambda)\,[R^2(S(\lambda\varkappa\alpha_1)) - R(S(\lambda\varkappa\alpha_1))]\,\Re\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d} - \omega\right) \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda \bmod \mathfrak{b}} \chi(\lambda)\,\Re\left(F\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}, \lambda\right) - F(\omega, \lambda)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Dieses Φ ist von der Variabeln ω unabhängig, und da es sich um analytische Funktionen handelt, *darf also ω für eine beliebige komplexe Zahl mit positiv imaginärem Teil gesetzt werden.*

Die Reihe F hängt natürlich mit Thetafunktionen einer Variabeln zusammen. Ich füge die Übergangsformel, von der weiterhin kein Gebrauch gemacht wird, hier an: In den Bezeichnungen von H. Weber ist

$$iF(\omega, \lambda) = -\log\vartheta_{11}(R_1\omega + R_2, \omega) - \pi i(R_1\omega + R_2) + Q \tag{14}$$

worin Q von λ unabhängig ist, also nach Summation über λ in $\Phi(\mathfrak{a})$ herausfällt. Die Invarianzeigenschaften der ϑ_{11} finden sich bei den $Z(s, v, \lambda)$ als Unabhängigkeit von der speziellen Auswahl der Basis α_1, α_2 von $\mathfrak{a}$ wieder.

§ 4.

Asymptotische Entwickelung einer Thetafunktion.

Wir beweisen in diesem Paragraphen folgenden Hilfssatz:

Sei $|\xi| = 1$, x eine positive reelle Variable, h_1 und h_2 reelle,

ebenso wie ζ von x unabhängige Größen, wobei $h_1 > 0$, $h_1 + h_2 > 0$. Dann besitzt die Funktion

$$\varphi(x) = \sum_{m,\, n \geqq 1} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} e^{-mnh_1 x - nh_2 x}$$

bei $x = 0$ die asymptotische Entwickelung:

$$\varphi(x) = \frac{1}{h_1 x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{h_2}{h_1}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} + \{x\}$$

mit

$$\lim_{x=0} \{x\} = 0.$$

Beweis:

Wir erinnern uns zunächst daran, daß für $\zeta \neq 1$, $|\zeta| = 1$, die Reihe

$$s_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n}$$

konvergiert und ks_k beschränkt für alle k ist. Mithin für $y > 0$ durch partielle Summation

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} e^{-ny} \right| < \frac{C}{N} e^{-Ny},$$

worin C, wie weiterhin $C_1, C_2, \ldots$ Constante, d. h. nur von ζ, h_1, h_2 abhängige, dagegen von x, y, N unabhängige Größen bedeuten.

Die Doppelsumme in φ teilen wir derart in zwei Bestandteile, daß wir erst über n von 1 bis N, sodann von $n = N+1$ bis ∞ summieren, die Verfügung über den eingeschalteten Wert N uns noch vorbehalten.

Der zweite Bestandteil ergibt

$$(15) \quad \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} e^{-mnh_1 x - nh_2 x} \right| < \frac{2C}{N} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(mh_1 + h_2) Nx} < \frac{2C}{N} \frac{e^{-h_2 Nx}}{1 - e^{-h_1 Nx}},$$

während im ersten Teil

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} e^{-mnh_1 x - nh_2 x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n}{n} \frac{e^{-n(h_1 + h_2)x}}{1 - e^{-nh_1 x}}.$$

Hier ist für $y > 0$ und $\lim y = 0$

$$\frac{1}{1 - e^{-y}} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2} + \Theta(y), \quad \text{wo } |\Theta(y)| < C_2 y,$$

also für

$$y = nh_1 x (\leqq h_1 Nx)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n}{n} \frac{e^{-n(h_1+h_2)x}}{1-e^{-nh_1 x}} = \frac{1}{h_1 x} \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n}{n^2} e^{-n(h_1+h_2)x}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n}{n} e^{-n(h_1+h_2)x} + P(x)$$

wo

$$|P(x)| < C_2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \cdot e^{-n(h_1+h_2)x}\, nh_1 x < C_3 \cdot Nx.$$

Unter Anwendung des Mittelwertsatzes erhält man für den imaginären Teil des ersten Gliedes der rechten Seite

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n^2} e^{-n(h_1+h_2)x}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n^2} - (h_1+h_2)x \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} e^{-n\vartheta(h_1+h_2)x}$$

(ϑ ein echter Bruch, der nur von x, N abhängt). Somit schließlich

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} e^{-mnh_1 x - nh_2 x} = \frac{1}{h_1 x} \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n^2}$$
$$(16) \qquad - \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} e^{-n\vartheta(h_1+h_2)x}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} e^{-n(h_1+h_2)x} + P(x).$$

Wir machen jetzt N von x abhängig derart, daß es ins Unendliche wächst, wenn x gegen Null konvergiert, während gleichzeitig

$$(17) \qquad \lim_{x=0} Nx = 0, \quad \lim_{x=0} \frac{1}{N^2 x} = 0,$$

also etwa

$$N \text{ asymptotisch } = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Für die rechte Seite in (16) erhalten wir dann auf Grund der Abschätzung

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n^2} \right| < \frac{\text{const.}}{N^2}$$

und wegen der gleichmäßigen Konvergenz der zweiten Reihe

$$\frac{1}{h_1 x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{h_2}{h_1}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{n} + R,$$

$$|R| < C_3 \,.\, Nx + \frac{C_4}{N^2 x} + \{x\}$$

d. h. R konvergiert wegen (17) gegen Null.

In Verbindung mit (15) folgt dann in der Tat die Behauptung des Hilfssatzes.

§ 5.

Bestimmung von $\Phi(a)$ durch Grenzübergang.

Die Bestimmung von $\Phi(a)$ in dem gefundenen Ausdruck der Klassenzahl nehmen wir jetzt so vor, daß wir Gebrauch von der Tatsache machen: $\Phi(a)$ ist von den dort vorkommenden Variabeln ω unabhängig.

Wir setzen darin

$$(18) \qquad \omega = -\frac{d}{c} + ix, \quad \frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \frac{a}{c} + \frac{i}{c^2 x}$$

und lassen die reelle positive Größe x gegen 0 konvergieren. Für $F(\omega, \lambda)$ setzen wir dann die nach § 4 sich ergebende asymptotische Entwickelung nach Potenzen von x ein; alle von x abhängigen Glieder müssen sich dabei herausheben, und das konstante Glied dieser Entwickelung stellt schließlich den gewünschten Ausdruck von $\Phi(a)$ dar.

Wir finden der Reihe nach unter der Annahme (18)

$$(19) \qquad \Re\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d} - \omega\right) = \frac{a+d}{c},$$

$$F\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \lambda\right) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \left(\left(\frac{a}{c} + \frac{i}{c^2 x}\right) R_1 + R_2\right) n}}{n} + \{x\}.$$

Wenn $x \to 0$, bleiben nur diejenigen Glieder stehen, wo R_1 etwa $= 0$ ist, d. h.

$$(20) \qquad \Re\left(F\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \lambda\right)\right) \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n R_2}{n}\Bigg|_{R_1 = 0}$$

Endlich

$$iF(\omega, \lambda) = iF\left(-\frac{d}{c} + ix\right) = \sum_{m, n \geq 1} \frac{e^{2\pi i (mn + nR_1)\left(-\frac{d}{c} + ix\right) + 2\pi i n R_2}}{n}$$

$$+\sum_{m,n\geqq 1}\frac{e^{2\pi i(mn-nR_1)\left(-\frac{d}{c}+ix\right)-2\pi i n R_2}}{n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n\left(-\frac{d}{c}R_1+ixR_1+R_2\right)}}{n}.$$

Hierin ersetzen wir, indem wir $c>0$ voraussetzen,

$$m \text{ durch } mc-k,$$

wobei m von 1 bis ∞, k von 0 bis $c-1$ läuft.

Ferner schreiben wir

$$\zeta_k = e^{2\pi i\left(\frac{-R_1+k}{c}d+R_2\right)},\quad \zeta'_k = e^{2\pi i\left(\frac{R_1+k}{c}d-R_2\right)}.$$

Also

$$\zeta'_{c-k}=\zeta_k^{-1}$$

Dadurch wird

$$iF(\omega,\lambda)=\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{m,n\geqq 1}\frac{\zeta_k^n e^{-2\pi mncx-2\pi nx(R_1-k)}}{n}$$

$$+\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{m,n\geqq 1}\frac{\zeta_k'^n e^{-2\pi mncx+2\pi nx(R_1+k)}}{n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0^n e^{-2\pi nR_1x}}{n}$$

und folglich

$$2\Re(F(\omega,\lambda))=\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{m,n\geqq 1}\frac{\zeta_k^n-\zeta_k^{-n}}{in}e^{-2\pi mncx-2\pi nx(R_1-k)}$$

$$-\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{m,n\geqq 1}\frac{\zeta_k'^n-\zeta_k'^{-n}}{in}e^{-2\pi mncx+2\pi nx(R_1+k)}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0^n-\zeta_0^{-n}}{in}e^{-2\pi nR_1x}.$$

Nach Multiplikation mit $\chi(\lambda)$ und Summation über λ finden wir, daß in der Tat in der asymptotischen Entwickelung nach x das Glied mit $\frac{1}{x}$ herausfällt und es bleibt

$$2\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\,\Re(F(\omega,\lambda))\longrightarrow$$

$$-\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{R_1-k}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_k^{n}-\zeta_k^{-n}}{in}$$

$$-\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{R_1+k}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_k'^{n}-\zeta_k'^{-n}}{in}$$

$$+\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0^{n}-\zeta_0^{-n}}{in}$$

$$=-\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{k=1}^{c}\left(-\frac{1}{2}+\frac{R_1+k}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_k'^{-n}-\zeta_k'^{n}}{in}$$

$$-\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{R_1+k}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_k'^{n}-\zeta_k'^{-n}}{in}$$

$$+\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_0'^{-1}-\zeta_0'}{in}$$

(21) $$=-2\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{R_1+k}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_k'^{n}-\zeta_k'^{-n}}{in}.$$

Nun sind für festes x die Zahlen $\frac{R(x)+k}{c}$ für $k=0\ldots c-1$ sämtlich zwischen 0 incl. und 1 excl. gelegen und stimmen daher überein mit der Menge der Zahlen $R\left(\frac{x+k}{c}\right)$ für $k=0-c-1$ oder auch für ein beliebiges volles Restsystem k mod. c.

Aus (9), (21), folgt dann

$$\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\,\Re(F(\omega,\lambda))\longrightarrow$$

$$+\pi\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\sum_{k \bmod. c}\left[\frac{1}{2}-R\left(\frac{S(\lambda\varkappa\alpha_1)+k}{c}\right)\right]\left[R\left(\frac{S(\lambda\varkappa\eta\alpha_1)+kd}{c}\right)\right.$$
$$\left.-R\left(\frac{-S(\lambda\varkappa\eta\alpha_1)-kd}{c}\right)\right]$$

k darf darin ein beliebiges volles Restsystem mod. c, aber für alle λ das gleiche, durchlaufen.

Also schließlich

$$\Phi(\mathfrak{a})=\sum_{\lambda}\chi(\lambda)\left[R^2(S(\lambda\varkappa\alpha_1))-R(S(\lambda\varkappa\alpha_1))\right]\frac{a+d}{c}$$

(22)

$$+\sum_{\lambda,\,R_1=0}\chi(\lambda)\frac{R(S(\lambda\varkappa\alpha_2))-R(-S(\lambda\varkappa\alpha_2))}{2}$$

$$(22) \qquad - \sum_{\lambda, k} \chi(\lambda) \left[R\left(\frac{S(\lambda \varkappa \eta \alpha_1) + kd}{c} \right) - R\left(- \frac{S(\lambda \varkappa \eta \alpha_1) + kd}{c} \right) \right] R\left(\frac{S(\lambda \varkappa \alpha_1) + k}{c} \right).$$

Die mittlere Summe ist 0, da, wenn λ die Restklassen mit $R_1 = 0$ durchläuft, auch $-\lambda$ dieselben Restklassen durchläuft, und $\chi(-\lambda) = \chi(\lambda)$.

Um diese Ausdrücke, die ja bereits elementar-arithmetischer Natur sind, noch etwas zu vereinfachen, wollen wir *voraussetzen*, daß der Körper $K = K(\sqrt{\delta})$ nicht zwei quadratische Unterkörper enthält, also *entweder kein Galoischer Körper* ist, oder, falls er das ist, *ein zyklischer Körper* ist. Diese Ausnahmefälle bieten ja kein besonderes Interesse, da hier die Klassenzahl bereits durch die Formeln für die Kreiskörper bekannt ist.

Unsere Annahme ist, wie man sich leicht überzeugt, identisch mit dieser:

Es sei $N(\delta)$ keine rationale Quadratzahl.

Unter dieser fortan beibehaltenen Annahme gibt es rationale Zahlen n (sogar Primzahlen), derart, daß

$$\chi(n) = -1.$$

Denn es ist nach § 1

$$\chi(n) = \left(\frac{\delta}{n} \right) = \left(\frac{N(\delta)}{n} \right)_{k(1)},$$

wo dieses letztere das quadratische Restsymbol im rationalen Körper ist. Sobald $N(\delta)$ keine Quadratzahl, gibt es bekanntlich Zahlen n, wofür das Symbol den Wert -1 hat.

Hieraus folgt:

$$(23) \qquad \sum_{S(\lambda \varkappa \alpha_1) \text{ ganz}} \chi(\lambda) = 0.$$

Die Summe ist dabei über diejenigen verschiedenen Restklassen $\lambda \bmod \mathfrak{d}$ zu erstrecken, wofür $S(\lambda \varkappa \alpha_1)$ eine ganze Zahl ist. Denn λn durchläuft für zu $\mathfrak{d}$ teilerfremdes ganzes rationales n dieselben Restklassen, daher

$$\sum_{S_1 \text{ ganz}} \chi(\lambda) = \sum_{S_1 \text{ ganz}} \chi(\lambda n) = \chi(n) \sum_{S_1 \text{ ganz}} \chi(\lambda) = - \sum_{S_1 \text{ ganz}} \chi(\lambda),$$

wenn n so gewählt, daß $\chi(n) = -1$. Analoges gilt natürlich für α_2. (Die Summe kann natürlich leer sein, wenn es keine Restklasse der verlangten Art gibt).

Ferner folgt:

(24) $$\sum_{\lambda} \chi(\lambda) R(S(\lambda \varkappa \alpha_1)) = 0.$$

Denn diese Summe geht durch Vertauschung von λ mit $-\lambda$ über in

$$\sum_{\lambda} \chi(\lambda) R(-(\lambda \varkappa \alpha_1)) = \sum_{\lambda} \chi(\lambda)(1 - R(S(\lambda \varkappa \alpha_1))) - \sum_{S_1 \text{ ganz}} \chi(\lambda)$$

(unter Anwendung der Regel $R(-x) = 1 - R(x)$ für nicht ganze x). Wegen (23) und $\sum \chi(\lambda) = 0$ ist dies das Negative der ursprünglichen Summe, diese daher $= 0$.

Ähnlich ergibt sich

(25) $$\sum \chi(\lambda) R\left(\frac{S_1 + k}{c}\right) = 0$$

summiert über die λ, k, wofür

$$R\left(\frac{dS_1 - cS_2 + kd}{c}\right) = 0.$$

Denn gleichzeitige Vertauschung von λ mit $-\lambda$ und k mit $-k$ liefert für diese Summe als arithmetisches Mittel auch die Form

(26) $$\frac{1}{2} \sum_{\lambda, k} \chi(\lambda) \left[R\left(\frac{S_1 + k}{c}\right) + R\left(-\frac{S_1 + k}{c}\right)\right]$$

Für die hier auftretenden Glieder kann aber $\frac{S_1 + k}{c}$ nicht ganz sein. Denn daraus würde folgen, S_1 ist ganz, und da auch noch $\frac{dS_1 - cS_2 + kd}{c}$ ganz sein soll, so müßte außerdem noch S_2 ganz sein, was nicht der Fall ist. Folglich ist die Summe (25) gleich

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\lambda, k} \chi(\lambda)$$

mit der Summationsbedingung

$$R\left(\frac{dS_1 - cS_2 + kd}{c}\right) = 0.$$

Wie oben bei (23) schließen wir unter Zuhilfenahme einer Zahl n mit $\chi(n) = -1$, daß diese Summe gleich 0 ist, also die Gl. (25) besteht.

Durch Anwendung von (24), (25) finden wir dann für $\Phi(\mathfrak{a})$

(27) $$\Phi(\mathfrak{a}) = \frac{a + d}{c} \sum_{\lambda} \chi(\lambda) R^2(S(\lambda \varkappa \alpha_1)) - 2 \sum_{\lambda} \chi(\lambda) \sum_{k \bmod c.} R\left(\frac{S(\lambda \varkappa \eta \alpha_1) + kd}{c}\right) R\left(\frac{S(\lambda \varkappa \alpha_1) + k}{c}\right).$$

Ich füge noch die Werte von a, d, c dazu:

$$a = \frac{-\eta\alpha_1'\alpha_2 + \eta'\alpha_1\alpha_2'}{\varDelta}$$

$$d = \frac{\eta\alpha_1\alpha_2' - \eta'\alpha_1'\alpha_2}{\varDelta}$$

$$c = \frac{\eta - \eta'}{\varDelta}\alpha_1\alpha_1' (> 0), \quad \frac{a+d}{c} = \frac{\varDelta}{\alpha_1\alpha_1'} \cdot \frac{\eta + \eta'}{\eta - \eta'}.$$

Der Herleitung nach ist $\chi_0(\mathfrak{a})\,\Phi(\mathfrak{a})$ nur vom Ideal $\mathfrak{a}$ und sogar nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ abhängig, ändert sich also nicht, wenn man α_1, α_2 einer ganzzahligen Transformation mit Determinante 1 unterwirft. Es entsteht die Aufgabe, diese Invarianz an dem obigen Resultat direkt zu konstatieren, was ich nach einigen vergeblichen Versuchen indessen aufgegeben habe. Weiter folgt noch, daß, wenn man η durch η^m ersetzt, sich obiger Ausdruck für $\Phi(\mathfrak{a})$ um den Faktor $\frac{1}{m}$ ändert, was gleichfalls direkt nachgewiesen werden müßte.

Ich spezialisiere nun das Resultat noch, indem ich den Grundkörper k möglichst einfach wähle, sodaß dann nur noch das $\sqrt{\delta}$, welches den Relaltivkörper erzeugt, variabel bleibt.

$$1)\quad k = k(\sqrt{3}), \quad h = 1, \quad \eta = \varepsilon = 2 + \sqrt{3}.$$
$$\mathfrak{a} = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\sqrt{3}.$$
$$c = 1, \quad \frac{a+d}{c} = 4, \quad \varkappa = \frac{1}{2\delta\sqrt{3}}$$

$$\Phi(1) = \sum_{\lambda \bmod. \delta} \chi(\lambda) \left\{ 4R^2\left(S\left(\frac{\lambda}{2\delta\sqrt{3}}\right)\right) - 2R\left(S\left(\frac{\lambda\eta}{2\delta\sqrt{3}}\right)\right) R\left(S\left(\frac{\lambda}{2\delta\sqrt{3}}\right)\right)\right\}$$

Also nach (12):

Sei δ die Relativ-Diskriminante des total imaginären Körpers $K(\sqrt{\delta})$ bezüglich seines Unterkörpers $k(\sqrt{3})$. Dann ist seine Klassenzahl

$$H = \frac{w_1}{4}\Phi(1) \tag{28}$$

$w_1 = 2$, wenn $\eta = 2 + \sqrt{3}$ auch Grundeinheit in K, sonst $w_1 = 4$). Dabei ist angenommen, daß $N(\delta)$ keine rationale Quadratzahl ist.

Machen wir noch die weitere Voraussetzung, daß δ ohne rationalen Teiler ist, dann ist jede Zahl aus k einer rationalen Zahl mod. δ kongruent. Sei r eine rationale Zahl, sodaß

$$\eta = 2 + \sqrt{3} \equiv r \pmod{\delta},$$

ferner

$$N(\delta) = D, \quad \delta = a + b\sqrt{3}.$$

Das Restsymbol einer rationalen Zahl n in k

$$Q(n) = \left(\frac{\delta}{n}\right)_k$$

ist bekanntlich gleich dem Legendreschen Symbol in $k(1)$

$$\left(\frac{N(\delta)}{n}\right)_{k(1)} = \left(\frac{D}{n}\right).$$

Ferner ist

$$\chi(b) = \left(\frac{\delta}{b}\right)_k = \left(\frac{D}{b}\right) = \left(\frac{a^2 - 3b^2}{b}\right) = 1$$

und damit ergibt sich für die Klassenzahl eines solchen Körpers K

(29) $$H = \frac{w_1}{2} \sum_{n=0}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) \left\{ 2\frac{n^2}{D^2} - \frac{n}{D} R\left(\frac{nr}{D}\right) \right\}$$

2) $k = k(\sqrt{2})$. $h = 1$. $\eta = 3 - 2\sqrt{2} = \varepsilon^2$

$$a = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\sqrt{2}$$

$$a = d = 3, \quad c = 2.$$

Die Klassenzahl eines Relativkörpers $K(\sqrt{\delta})$ ist

$$H = \frac{3w_1}{8} \sum_{\lambda \bmod \delta} \chi(\lambda) R^2\left(S\left(\frac{\lambda}{2\delta\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$-\frac{w_1}{4} \sum_{\lambda \bmod \delta} \chi(\lambda) \left\{ R\left(S\left(\frac{\lambda\eta}{4\delta\sqrt{2}}\right)\right) R\left(S\left(\frac{\lambda}{4\delta\sqrt{2}}\right)\right) + R\left(S\left(\frac{\lambda\eta}{4\delta\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\right) R\left(S\left(\frac{\lambda}{4\delta\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Der allgemeine Ausdruck für $\frac{H}{h}$ scheint mir noch einer weiteren Vereinfachung fähig und bedürftig, auch mit Rücksicht auf die oben genannten Invarianzeigenschaften. Doch ist mir eine solche Vereinfachung noch nicht in befriedigender Weise gelungen.

Hamburg, den 20. November 1920.

Zur Kenntniss der Contactmetamorphose an den Diabasen des Harzes.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Januar 1921.

1. Die Knotenschiefer.

Cordierit ist eine der gewöhnlichsten Neubildungen am Contact kieselreicher Gesteine mit Eruptivmassen, und bei seiner Synthese wie bei seiner zufälligen Entstehung gemachte Erfahrungen weisen darauf hin, daß er aus Schmelzen geeigneter Zusammensetzung ohne Mitwirkung von Dämpfen bei gewöhnlichem Druck leicht sich bildet. Unter diesen Umständen ist es auffallend, daß Cordierit nicht auch aus dem Contact von Diabasen mit sandigem Tonschiefer angegeben wird, zumal hier seit Zincken unter den Namen Spilosite und Desmosite contactmetamorphe Schiefer mit „Concretionen" bekannt geworden sind, die den nachweislich aus Cordierit im Contact mit Tiefengesteinen entstandenen Knoten in hohem Grade ähneln.

An verschiedenem Vorkommen des Harzes gelang nun der Nachweis, daß die Knoten der Sp. und D. nach ihrer Form, Struktur und Zusammensetzung ebenfalls Pseudomorphosen von Pinit (Chlorit + Serizit) nach Cordierit sind und zwar nach Drillingen und Sechslingen desselben mit Sanduhr-förmigem Bau, wie sie von Hussak u. A. auch in unzersetztem Zustande beobachtet sind. Im Besonderen spricht nichts dafür, daß ihnen etwa ein Andalusit-ähnliches Mineral zu Grunde liegt, wie es anscheinend von früheren Beobachtern z. T. vermutet ist.

In den meisten Sp. und D. hat außer der Neubildung von Cordierit auch wohl eine Anreicherung an Serizit stattgefunden, außerdem unterscheiden sie sich von den ursprünglichen Schiefern durch das Fehlen der Rutilnädelchen; statt ihrer ist Leukoxen vorhanden, im übrigen tragen sie im Zwischengewebe ihrer Knoten noch deutliche Spuren ihres detritischen Ursprungs.

2. Die Adinolisierung der Knotenschiefer.

Unter den Knotenschiefern sind auch solche beschrieben und auch von mir beobachtet, in denen an der Füllung der Knoten auch Albit teilnimmt oder sogar vorherrscht, derartige Schiefer vermitteln Übergänge der Sp. und D. zu den Adinolen. Ebenso machen sich solche in der Weise bemerkbar, daß Knoten-reiche und Knoten-freie Schichten von durchaus adinolischem Habitus vielfach mit einander abwechseln. Man wird für letzteres Verschiedenheiten der ursprünglichen Zusammensetzung der einzelnen Lagen verantwortlich machen dürfen wie sie ja in tonigen Sandsteinen ganz gewöhnlich sind. In der Tat beobachtet man auch z. B. Tongallen-ähnliche knotenfreie Stellen von mehr adinolischem Habitus in sonst spilositischen Lagen. Die ersterwähnten Übergänge aber sind darin begründet, daß in vielen Fällen die fertigen Cordieritgesteine noch einer Adinolisierung unterlagen.

Eine solche zeigt sich stellenweise nur in dem Vorkommen Albit-führender Adern in dem Knotenschiefer, dessen Zwischengewebe noch die gewöhnliche, fast rein klastische Beschaffenheit aufweist. An andern Stellen hat aber die Albitisierung bereits die Zwischenmasse angegriffen, die dann jene innige Verflößung farbloser Körnchen zeigt die für die Hauptmasse der Adinolen so überaus charakteristisch ist und in der Quarz und Albit als Hauptgemengteile mit großer Wahrscheinlichkeit zu vermuten, wenn auch seltener nachzuweisen sind. Hat die Adinolisierung auch die Knoten schon ergriffen, so können geradezu Knotenadinolen entstehen, allerdings manchmal der Art, daß die Spuren der Knoten nur noch mikroskopisch oder allenfalls auf angeschliffenen Flächen, nicht aber mehr im Felde zu sehen sind. In solchen Fällen pflegt auch die Umbildung der Zwischenmasse der Knoten zu einem gröberen krystallinen Gewebe von Quarz und Albit, sowie des Leukoxen in deutlicheren Titanit weiter fortgeschritten zu sein. In gleichzeitig stark gepreßten Gesteinen machen sich die Knoten dann wohl nur noch als kurze Flasern bemerklich und bei starker mechanischer Zerrüttung, die den Lösungen zahlreiche Wege öffnete erscheinen die Reste der Knoten in flasrigen, noch etwas chloritreicheren Aggregaten, durchzogen und umwoben von vielen Adern die mit den eben erwähnten farblosen, in einander verflochtenen Körnchen, zuweilen auch deutlich erkennbaren Quarz-Albit-Aggregaten gefüllt sind.

3. Andere Arten von Diabascontactgesteinen im Harz.

Im Contact z. B. des Buntsandsteins mit Basalt ist es nirgend zu einer Albitbildung im Sandstein gekommen; das kann sowohl an der abweichenden Zusammensetzung der letzten Erstarrungsreste des Basalts gegenüber dem des Diabas wie an den physikalischen Bedingungen der Erstarrung in der Nähe der Erdoberfläche gegenüber der in der Tiefe liegen. Vielfach ist aber auch die Cordieritbildung, und dann meist auch die Glasbildung, ausgeblieben, weil Zusammensetzung oder Temperatur nicht geeignet waren. Das ist auch an zahlreichen Stellen im Diabascontact der Fall gewesen und zwar begreiflicherweise auch da, wo in ganz geringer Entfernung typische Knotenschiefer oder Adinole anstehen. Die Metamorphose verrät sich an derartigen meist sehr Glimmerarmen und dafür Quarz-reichen Sedimenten gewöhnlich nur durch Härtung (bei fehlender oder wenig deutlicher Schieferung), die wohl die Folge weniger einer Verkieselung als einer Umkrystallisation und damit verbundener stärkerer Verzahnung der klastischen Gemengteile ist.

Auf solche Veränderungen, allerdings mit Einschmelzung (vielleicht infolge einer geringen Mischung mit Diabasmaterial), beschränkt sich auch die Metamorphose an den wenigen Stellen wo die Grenze zwischen Schiefer und Diabas bis in den Schliff verfolgt werden konnte, so bei Mägdesprung und namentlich auch in der Schieferscholle, die bei km 7.4 der Straße Hasselfelde-Rübeland (nördlich vom Mittelkopf) im Diabas eingeschlossen ist. Hier ist aber besonders auffallend, daß gegenüber den wenig veränderten Randteilen der Scholle ihre mittleren, vom Diabas ca. ½ m entfernten Teile in ein Gestein verwandelt scheinen, das makroskopisch wie auch nach der chemischen Zusammensetzung einer typischen Adinole durchaus gleicht. Die mikroskopische Untersuchung belehrt aber, daß nach der Struktur wie nach der Form der klastischen Teilchen hier kein gewöhnlicher Schiefer sondern ein Porphyroid der Metamorphose unterlegen hat. Diese sind von Haus aus chemisch wie mineralogisch Adinolen z. T. sehr ähnlich, es braucht also auch hier, wie in den äußeren Teilen der Scholle, keine Zufuhr von Alkali stattgefunden zu haben, es genügt eine Umkrystallisation unter Einfluß der hohen Temperatur.

Da solche Porphyroide in jenem Gebiet den Schiefern in großer Zahl eingelagert sind, ist es nicht zu verwundern, daß auch an anderen Stellen solche bisher als echte Adinolen auf-

gefaßte Contactprodukte beobachtet werden konnten; z. B. westl. Allrode im Lupbodetal und bei Hasselfelde und bei Mägdesprung.

4. Regionalmetamorphose der Contactprodukte.

Nach der Contactmetamorphose haben die Sedimente fast überall eine starke Schieferung erfahren, denn die Durchmesser der Knoten in der Schieferungsfläche sind meist erheblich größer als senkrecht dazu, auch zeigen sich zuweilen Streckungshöfe hinter den Knoten. Da die Cordierite selbst einer solchen Deformation wohl kaum zugänglich gewesen wären, muß man annehmen, daß beim Eintreten der Schieferung die Pinitisierung der Cordierite schon weit fortgeschritten war oder Hand in Hand mit ihr ging.

In ihrer mineralogischen Zusammensetzung weichen diese geschieferten Gesteine von andern nicht merklich ab, soweit sie außerhalb der regional-metamorphen Zone von Wippra liegen; innerhalb derselben aber, wo auch die Deformationen besonders stark sind, fehlt ihnen auffallender Weise der Leukoxen, dafür sind aber eine Fülle von Rutilnädelchen vorhanden, anscheinend viel reichlicher und größer als in den nicht contactmetamorphen Schiefern desselben Gebietes. Die Knoten können in derartigen Gesteinen infolge der starken Deformationen sehr undeutlich werden. Adinolen aus diesem Gebiet gelangten nicht zur Untersuchung.

5. Die wesentlichen Züge der Diabascontactmetamorphose im Harz.

Nach dem Vorstehenden erscheinen Knotenbildungen und Alkalizufuhr in den Sedimenten als zwei von einander durchaus unabhängige Vorgänge, von denen der zweite nicht überall, aber an vielen Orten, dem ersten gefolgt ist. Die Knotenbildung ging wahrscheinlich bei einer Temperatur vor sich, die der Schmelztemperatur von Albit sehr nahe kam und die Temperatur bei der aus den intrudierten Alkali-reichen Lösungen Albit auskrystallisierte erheblich übertraf. Während nun die Knotenschiefer an zahlreichen Stellen nachträglich adinolisiert wurden, fand an vielen andern wohl nur Adinolisierung statt, nämlich da, wo die Temperatur zur Cordieritbildung nicht ausreichte oder die Zusammensetzung der Sedimente dies nicht zuließ: die Lossen'sche Erfahrung, daß Spilosite und Adinole öfter deutlich regional geschieden sind, ist damit durchaus vereinbar.

Die Zufuhr Alkali-reicher Lösungen bei erhöhter Temperatur ist vermutlich nicht nur die Ursache der Adinolisierung sondern auch der Pinitisierung der Cordierite; ohne eine solche ist die Anreicherung der Contactgesteine an Serizit kaum verständlich, anderseits mußte schon aus der starken Schieferung der Knoten auf frühzeitige Pinitisierung geschlossen werden, nämlich bald nach der Intrusion der Diabase, die also wohl demselben mechanischen Prozeß wie die Schieferung entsprang.

Da in den Keratophyren ein Teil der Alkalien schon an Fe^{III} gebunden zu sein pflegt, ist es offenbar wahrscheinlich, daß die Magmenreste der Harzer, den Keratophyren verwandten, Diabase auch reines (nicht nur Tonerde-) Alkalisilikat enthielten. Diese sind sehr leicht löslich in Wasser, werden also, wenn sie bis an die Erdoberfläche gefördert werden bald verschwinden, soweit sie nicht etwa zur Umbildung von Tuffen u. dergl. beitragen; eine merkliche Metamorphose der mit dem Diabas in Berührung kommenden Sedimente ist hier also nicht zu erwarten. Bei Intrusionen dagegen konnten sie in der Tiefe, zumal unter dem erhöhten Druck, wirksam werden, wenn die Sedimente hinreichende Mengen Ton zur Bindung des Alkalis enthielten. Sie konnten auch den Cordierit erfassen, aus ihm unter Abscheidung von Chlorit Serizit entstehen lassen oder ihn eventuell ganz durch Albit verdrängen. Möglich erscheint, daß auch die Leukoxen-Bildung auf Rechnung des Ca-Gehaltes der vom Diabasrestmagma ausgehenden Lösungen zu setzen ist. Der Gang der Krystallisation in dem von Bowen untersuchten System Albit-Anorthit-Diopsid macht es auch für den Diabas wahrscheinlich, daß der Gehalt des nach der Krystallisation von Plagioklas und Augit noch verbleibenden Magmarestes an Ca nur gering war, so daß also für die (erst bei niederer Temperatur einsetzende) Bildung von Zeolithen (die meist erhebliche Mengen von Ca enthalten) kein Material mehr übrig blieb.

Der Äther im Weltbild der Physik.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Dezember 1920.

§ 1. **Vorwort.**

Als endliches Wesen mit beschränkten Fähigkeiten ist der Mensch nicht im Stande, das Getriebe der Welt zu durchschauen. Doch begnügt er sich nicht mit dem, was die Sinne ihm direkt zeigen, sondern schickt die Gedanken weit darüber hinaus. Das beginnt schon mit dem ersten Schritt der Naturauffassung, wenn auf Grund der inneren Empfindungen eine „Welt“ aufgebaut wird. Bei der Fülle der Erfahrungen, welche die Physik geliefert hat, setzt ihre Verwertung zur Ausmalung eines Weltbildes eine so große Geistesarbeit voraus, daß es nicht Vielen gelingen wird, in selbständiger Arbeit einen erschöpfenden Überblick zu gewinnen. Die Überlegungen des Einzelnen werden durch Gewohnheit, Anlage und Neigung geleitet; diese bestimmen, worauf geachtet wird, was der Aufmerksamkeit entgeht, und wählen für den Ratsuchenden die Führer, denen Vertrauen geschenkt wird. So kann es nicht wundernehmen, daß in den Gebieten, welchen die Forschung gerade ihre Arbeit widmet, das Weltbild von den Anteilnehmenden sehr verschieden gezeichnet wird. —

Den Mittelpunkt der folgenden Ausführungen bildet die Äthervorstellung, mit der die höchsten Ziele der forschenden Physik innig verknüpft sind. Es soll meine Aufgabe sein, denjenigen Material zu bringen, welche sich bestreben, ein eigenes Urteil zu gewinnen. Schon 1894—1897 habe ich eine Reihe von Arbeiten über den Äther und seine Beziehungen zur Materie geschrieben. Die Entwicklung der Lorentz'schen Elektrodynamik und die Einstein'sche Relativitätstheorie veranlaßten mich, 1911 und 1914 wieder auf das Thema zurückzukommen. Seitdem ist die „allgemeine“ Relativitätstheorie entstanden, und ich selbst glaube erkannt zu haben, daß die Gravitation eine elektrodynamische Erscheinung ist. So bietet sich für mich ein neuer Anlaß, die

Ätherfrage zu behandeln. Eine größere Arbeit habe ich in den Annalen der Physik, Bd. 63, 1920 veröffentlicht. Dort sind auch meine früheren Arbeiten über den gleichen Gegenstand zitiert. Im Folgenden gebe ich Ergänzungen zur Annalenarbeit in Bezug auf grundsätzliche Fragen. —

Die Theorie, welche man ihrem Begründer folgend heute als „Relativitätstheorie“ bezeichnet, hat in der Zeit ihrer Entwicklung jene Gedanken, deren sie sich selbst aufbauend bediente, so sehr in den Vordergrund gerückt, daß andere nicht minder wichtige Vorstellungen der Physik dadurch verdeckt wurden. Es ist unsere Aufgabe, unter sorgfältiger Verwertung und Anerkennung des Neugewonnenen einen Ausgleich zu erstreben. Die besondere Art der Relativität, welche die Relativitätstheorie voranstellte, die „Darstellungsrelativität“, wie ich sie weiterhin nenne, wird dabei den ersten Platz an die „Körperrelativität“ abzutreten haben. Das Wesentliche der Relativitätsgesetze, welche die Theorie an einen in kühnem Gedankenflug aus Raum und Zeit zusammengesetzten „vierdimensionalen Raum“ und sein „Linienelement“ knüpft, wird sich in einem „Anscheinsatz“ wiederfinden, der eine Verallgemeinerung Lorentz'scher Gesetze darstellt, und als Folge der Eigenschaften des Weltuntergrundes, des „Äthers“, in seinen Beziehungen zur molekularen Materie erscheint. Der Äther wird zum Träger der „Struktur“ des vierdimensionalen Raumes. — Eindrucksvoller als je in der Geschichte der Physik offenbart sich heute, daß der Äther unserer Welt die Körperlichkeit gibt; ahnend fragt das Gefühl, ob er auch die Grundlage für das geistige Leben biete. —

Meine Arbeit von 1911 in der Physikalischen Zeitschrift wurde 1912 in derselben Zeitschrift von M. v. Laue und von N. Campbell angegriffen. Die beiden Einwände von M. v. Laue werden weiterhin besprochen werden (S. 46 und 47); N. Campbell wendet sich so ziemlich gegen alles, was ich geschrieben habe, so bitte ich, die folgende Arbeit im ganzen als Antwort anzusehen.

§ 2. **Das System der Lichtschreitungen im Weltenraum.**

Unter „Schreitung“ verstehe ich wie in früheren Arbeiten den Bewegungszustand eines Punktes, der durch die jeweilige Geschwindigkeit dargestellt wird, wenn man ihn nicht vergleichend in Beziehung auf irgend ein Koordinatensystem, sondern als das tatsächlich Gegebene auffaßt. Der Unterschied zwischen Schreitung und Geschwindigkeit ist derselbe, wie der zwischen dem Ort, den ein Körper in einem bestimmten Zeitpunkt seines Geschickes in

der Welt wirklich einnimmt, und dem durch Koordinaten gegebenen relativen Ort. Die Geschwindigkeit ändert sich mit dem Koordinatensystem, während die Schreitung vom Koordinatensystem unabhängig ist. Nach der Namengebung von H. Minkowski könnte man die Schreitung auch „Weltrichtung" nennen. — In der Physik wird sehr oft die Schreitung gemeint, wenn von der Geschwindigkeit gesprochen wird. —

Zu jedem Raumzeitpunkt gehören dreifach unendlich viele Schreitungen, die durch das Sinnbild auseinanderlaufender Punkte sofort anschaulich gemacht werden. Um dabei zu dem allgemeinen Begriff der Schreitung zu kommen, muß man alle denkbaren Geschwindigkeiten von 0 bis herauf zu unendlich großen zulassen. Die Grenzen bei unendlich wachsenden Geschwindigkeiten werden durch die „Gleichzeitigkeits-Schreitungen" gegeben.

So lange man das Licht als wellenhafte Zustandsänderungen eines Weltäthers ansah, hielt man es für selbstverständlich, daß seine Ausbreitung im Weltenraum zwischen den Gestirnen unabhängig sei von den Bewegungen der als Lichtquellen dienenden Gestirne. Das wurde anders, als A. Einstein unter Verneinung des Äthers die Lichtquellen für selbständige Gebilde in dem sonst „wirklich" leeren Raum erklärte. W. Ritz, 1908, stellte nun sogar die Hypothese auf, das Licht übernähme für seine Wanderung voll die Bewegung des aussendenden Gestirnes. Dem gegenüber zeigte De Sitter 1913 unter Benutzung des Verhaltens von Doppelsternen, daß die Ritz'sche Hypothese der Wirklichkeit widerspricht. Im Anschluß hieran warf E. Freundlich 1913 die Frage auf, ob das Licht vielleicht zu einem gewissen Bruchteil die Geschwindigkeit der Quelle übernähme. De Sitter antwortete 1913, der Bruchteil müsse nach den Beobachtungen an Doppelsternen jedenfalls unter 1/500 liegen. W. Zurhellen folgerte 1914, eine schärfere Methode verwendend, daß der Bruchteil der übernommenen Geschwindigkeit, sofern er überhaupt vorhanden wäre, jedenfalls unter $1/10^6$ liegen müßte. Nach diesen Untersuchungen darf angenommen werden, daß die Lichtausbreitung im Weltenraum von der Bewegung der Lichtquellen unabhängig ist.

Während die Ausbreitung des Lichtes innerhalb der Materie viel Umständlichkeiten zeigt, gehorcht sie im Weltenraum den denkbar einfachsten Gesetzen: Es fehlt hier jede Andeutung einer auswählenden Absorption, und es scheint die Geschwindigkeit für alle Lichtarten gleich groß zu sein. Wie mir mein astronomischer Göttinger Kollege J. Hartmann mitteilt, kann man aus dem Verhalten der Doppelsterne mit Verfinsterungen schließen,

daß die Geschwindigkeit des roten und des blauen Lichtes jedenfalls um weniger als $1/10^6$ verschieden sind. Innerhalb des Bereiches, der für die heutige Physik in Betracht kommt, ist hiernach erlaubt, für die Lichtausbreitung im Weltenraum ein bestimmtes, zweifach unendliches System von Schreitungen anzunehmen. Es wird dieses weiterhin das *„System der Lichtschreitungen“* genannt werden. —

Auch die Geometrie der Lichtbewegung im Weltenraum erweist sich als sehr einfach. Die Astronomie kam bisher mit der Annahme der Euklid'schen Maßverhältnisse für alle Messungen aus. Unter dem Einfluß der Arbeiten von A. Einstein darf jetzt eine Abhängigkeit des Maßfeldes der Lichtausbreitung im Weltenraum von der Gravitation als festgestellt gelten. Doch ist der Einfluß nur sehr gering.

§ 3. Die physikalische Ursache der Bestimmtheit der Lichtschreitungen.

Angesichts der im vorigen Paragraphen besprochenen Beobachtungsergebnisse erhebt sich die Frage: *Was gibt im Weltenraum der Lichtausbreitung ihre physikalische Bestimmtheit*; anders ausgedrückt, was bestimmt dort die Lichtschreitungen? Es ist dies eine der wichtigsten unter den fundamentalen Fragen der forschenden Physik; daß man sie immer wieder übersah, oder nicht genügend beachtete, ist nach meinem Urteil einer der Gründe für die so oft aufgetretene Ätherverneinung der letzten Jahre. —

Die uns bekannte Materie ist als Träger des Lichtes im Weltenraume jedenfalls nicht anzunehmen. Sie ist, wie wir wissen, molekular gebaut, und ihre Molekeln scheinen schon bei den irdischen Vorgängen mehr als Störungen, denn als Träger der Lichtausbreitung. Im Weltenraum müssen die materiellen Molekeln in so weiten Abständen von einander angenommen werden, daß ihre Mitwirkung bei der Lichtausbreitung nicht in Betracht kommen kann. In solcher Erkenntnis nahmen die Physiker vor A. Einstein als Träger des Lichtes und als Ursache der physikalischen Bestimmtheit der Lichtschreitungen im Weltenraum ein besonderes körperliches Medium an, den Äther. A. Einstein glaubte anders urteilen zu dürfen. Die Äthervorstellung verwerfend, urteilte er so (Physikalische Zeitschrift 1909, Bd. 10, S. 819): „Die das Licht konstituierenden elektromagnetischen Felder erscheinen dann nicht mehr als Zustände eines hypothetischen Mediums, sondern als selbständige Gebilde, welche von den Lichtquellen ausgesandt werden, gerade wie nach der Newton'schen Emissionstheorie des Lichtes. Ebenso wie gemäß letzterer Theorie erscheint ein nicht von Strahlung durchsetzter, von ponderabler Materie freier Raum

wirklich als leer." — Die Schwierigkeiten, welche sich bei solcher Ansicht für die Vorstellung ergeben, sind von P. Ehrenfest 1913 (Zur Krise der Lichtäther-Hypothese, Berlin, bei J. Springer, S. 19), drastisch so gekennzeichnet worden: Man verlangt „von uns, daß wir die folgenden drei Formeln unterschreiben: 1) Die Lichtquellen werfen uns die Lichtsignale als selbständige Gebilde durch den leeren Raum zu. 2) An den Lichtstrahlen einer Quelle, die auf uns zuläuft und einer andern Quelle, die vor uns ruht, würden wir bei tatsächlicher Messung dieselbe Geschwindigkeit beobachten. 3) Wir erklären, daß uns die Kombination dieser beiden Aussagen befriedigt!!" —

Von den Relativitäts-Theoretikern wurden derartige Einwürfe nicht beachtet. Es ist für uns wichtig, eine Erklärung für dieses Verhalten zu suchen. — Im vorigen Jahrhundert wurden in weitgeführten Untersuchungen die Maßbeziehungen des Weltenraumes diskutiert. Dabei sind auch Geometrien für höhere Anzahl der Dimensionen als drei ins Auge gefaßt worden. An diese älteren Arbeiten wurde man erinnert, als H. Minkowski 1909 in einem Vortrag auf der deutschen Naturforscherversammlung, der sehr großes Aufsehen machte, Raum und Zeit zu einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit fest vereinigte, darauf hinweisend, daß erst Ort und Zeit zusammen etwas Bestimmtes ergeben. Die Lichtschreitungen erschienen als Bestimmungsstücke der Maßbeziehungen. *Die Zeit wurde zu einer imaginären vierten Raumkoordinate.* H. Minkowski erklärte ausdrücklich die neue Auffassung als eine naturgemäße Umwandlung der Raum-Zeit-Vorstellung der „Newton'schen Mechanik". Ein Ausblick der Verallgemeinerung der Raum-Zeit-Anschauung war damit gegeben, der die Mathematiker begeisterte. Genau wie es den erkenntnistheoretischen Hinweisen von A. Einstein entsprach, wurden die Lichtschreitungen dem körperlichen Inhalt der Welt entrückt und einer höheren Ordnung zugewiesen, die Raum und Zeit umfaßt. — In dem vierdimensionalen Raum erschien das System der Lichtschreitungen nun in einem für die Mathematiker sehr interessanten Bild als ein „Kegel" von „Weltrichtungen". —

Der Äther aber entschwand den Blicken. Man beachtete nicht die Worte, mit welchen B. Riemann (Abhandl. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1867, Bd. 13) einst, 1854, seine Ausführungen schloß, als er die Frage nach dem „*inneren Grunde der Maßverhältnisse des Raumes*", wie er sich ausdrückte, behandelte: „*Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, in das Gebiet der Physik*, . . ." Indem die Relativitätstheoretiker die

Bestimmtheit der Lichtschreitungen in den Maßeigenschaften des physikalisch leeren Raumes suchten, ergibt sich die merkwürdige Erscheinung, daß eben jene Theorie, welche die „Relativität" zur Geltung bringen wollte, zu einem Raum-Zeit-Absolutismus der gleichen Art führte, wie er einst von Newton zur Grundlage der Mechanik gemacht wurde, sogar noch verschärft, indem ihm auch die Bestimmung der Lichtschreitungen zugewiesen wurde. —

Die Umwandlung der Theorie zur „allgemeinen" Relativitäts-Theorie, die A. Einstein 1916 abschloß, brachte eine Wandlung der Sachlage insofern, als die Maßverhältnisse des vierdimensionalen Raumes, die bis dahin durch den Bau der Welt fest gegeben erschienen, nun als variabel in Zeit und Raum angesehen wurden. Der Materie wurde ein Einfluß zugeschrieben. Zur Kennzeichnung der Maßverhältnisse dienten zehn Größen, von denen, wie wir später erfahren werden, neun zur Festlegung der Lichtschreitungen nötig sind und die zehnte den Zeitablauf bestimmt. — Die Änderungen, welche Sonne und Erde in den Maßverhältnissen des vierdimensionalen Raumes bewirken, sind es, welche den Planeten ihre Bahnen vorschreiben, und uns unter dem Bilde der Schwerkraft an die Erde fesseln. Da so ein grundlegender körperlicher Einfluß der Maßverhältnisse des vierdimensionalen Raumes auf die Materie vorausgesetzt wird, erscheint dieser „Raum" selbst als körperlich, und es ist einleuchtend, daß damit ein „Äther" im Sinne der älteren Physik angenommen wurde. Dennoch blieb die Ätherverneinung bestehen. A. Einstein im 35.—45. Tausend seiner „gemeinverständlichen" Darstellung der Theorie (Braunschweig, bei Vieweg) spricht noch 1920 von dem Äther nur ablehnend. Jene 10 Maßzahlen, die er „Komponenten des Gravitationspotentiales" nennt, kennzeichnen für ihn „die Struktur des Raumes". Die Erklärung für diese weitgehende Abneigung, das Wort Äther zu gebrauchen, finden wir in Worten, die A. Einstein 1918 an Einwände von P. Lenard knüpfte. P. Lenard hatte 1918 (Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation, Jahrb. d. Rad. u. Elektronik, Bd. 15; als selbständige Schrift: Leipzig, bei Hirzel) an den Hinweis auf die von der Relativitätstheorie angenommene variable Raumbeschaffenheit die Bemerkung geschlossen, man empfinge den Eindruck, als ob hier der eben beseitigte Äther unter dem veränderten Namen „Raum" von selber „sich wieder gemeldet hätte". Dazu sagte A. Einstein 1918 (Naturwissenschaften, Bd. 6, S. 702): „Während aber nach der speziellen Relativitätstheorie ein Raumteil ohne Materie und ohne elektromagnetisches Feld als schlechthin leer, das heißt

durch keinerlei physikalische Größen charakterisiert erscheint, hat nach der allgemeinen Relativitätstheorie auch der in diesem Sinn leere Raum physikalische Qualitäten, welche durch die Komponenten des Gravitationspotentials mathematisch charakterisiert sind, welche das metrische Verhalten dieses Raumteiles, so wie dessen Gravitationsfeld bestimmen. Man kann diesen Sachverhalt sehr wohl so auffassen, daß man von einem Äther spricht, dessen Zustand von Punkt zu Punkt stetig variiert. Nur muß man sich davor hüten, diesem „Äther" stoffähnliche Eigenschaften (z. B. an jeder Stelle eine bestimmte Geschwindigkeit) zuzuschreiben". — Wie wir erkennen, lehnt A. Einstein den Gedanken ab, durch den Äther werde eine bestimmte Schreitung ausgezeichnet. Offenbar unter der Herrschaft solcher Vorstellungen vermeidet er den Ausdruck Äther. — Auch andere hervorragende Vertreter der Relativitätstheorie sprechen vom „Maßfeld", oder von den „Krümmungsverhältnissen" statt vom Äther. So interessant diese Ausdrucksweise ist, wenn man sie vom Standpunkt des Mathematikers aus ansieht, so gefährlich ist sie für die physikalische Auffassung. Wenn die Relativitätstheoretiker lehren, die Planetenbahnen würden durch die Maßverhältnisse des Raumes bestimmt, und diese ihrerseits gestalteten sich unter dem Einfluß der Sonne, so muß die Physik mit P. Riemann fragen, welches denn der innere physikalische Grund ist, der an jeder einzelnen Stelle die hier herrschenden besonderen 10 Werte der Maßverhältnisse zur Wirkung bringt? *Wir erkennen, daß hier eben jene fundamentale physikalische Frage in Verallgemeinerung zur Geltung kommt, mit deren Aufstellung der vorliegende Paragraph begonnen wurde.* Vermeidet man nun den Ausdruck Äther, so wird, wie die Erfahrung lehrt, bei Fernerstehenden der Eindruck erweckt, daß alte Probleme der Physik nunmehr überwunden seien. So aber liegt die Sache durchaus nicht. Wohl können wir hoffen, es sei eine bessere Beschreibung gewonnen, aber die Fragen, wie die Gravitation sich physikalisch erkläre, was die Lichtschreitungen bestimme, sind heute genau so offen wie früher. Für die spezielle Relativitätstheorie war der Planetenraum leer, für die allgemeine Relativitätstheorie hat er in den Maßverhältnissen physikalische Qualitäten gewonnen. Sollen wir glauben, es sei damit für die Physik ein Ende erreicht, und außer „Raum und Zeit" sei dort nichts vorhanden? Davon kann keine Rede sein; im Gegenteil, das eigentliche physikalische Leben beginnt sicherlich erst mit der Deutung jener 10 Zustandsgrößen des Raumzeitkontinuums. Deren physikalisches Wesen beruht darin, daß sie uns von der Wirksamkeit des Weltuntergrundes

Kunde geben. *So ist es denn schon deshalb geboten, den Ausdruck Äther zu gebrauchen, um der forschenden Physik eines ihrer wichtigsten Probleme klar zu zeigen.*

§ 4. **Galilei-Lorentz'sche Masssysteme.**

Es wird unsere Aufgabe sein, das Maßfeld des Weltuntergrundes durch die Materie hindurch zu verfolgen. — Als Vorbereitung dafür sollen einige Begriffe verdeutlicht werden, die später in Verbindung mit den Lichtschreitungen auftreten werden, und die gerade deswegen hier zunächst auf den Schall bezogen werden sollen.

Es mögen Beobachtungen auf einem großen ebenen, freien, windstillen Platz gemacht werden. Die vertikale Raumkoordinate beachten wir nicht. Dem gewöhnlichen Raum-Zeit-Koordinatensysten x, y, t, welches das „ruhende" System heißen soll, werde ein „bewegtes" System x', y', t' mit parallelen Raumachsen an die Seite gestellt. Zu dessen Konstruktion diene ein System von Wagen, welche mit gleicher und gleichmäßiger Geschwindigkeit v in der x-Richtung sich bewegen. Brücken zwischen den Wagen könnten hinzugefügt werden, wenn Zwischenpunkte gebraucht werden. t' ist sinngemäß durch Uhren zu messen, die im System x', y' ruhen. —

Das bewegte System x', y', t' soll durch passende Wahl der Längeneinheiten für die verschiedenen Richtungen, der Zeiteinheit, sowie durch passende Festsetzung der formalen „Gleichzeitigkeit" — der „Ortszeiten" in der Lorentz'schen Ausdrucksweise — so gestaltet werden, daß der Schall sich auch in diesem System für den Anschein nach allen Seiten mit gleicher Geschwindigkeit ausbreitet und zwar mit eben derselben Geschwindigkeit wie im ruhenden System; c sei der gemeinsame Wert der Schallgeschwindigkeit. — Im Hinblick auf das Ziel muß die Abgleichung der „Ortszeiten" gegeneinander so geschehen, daß die Schallgeschwindigkeit zwischen irgend zwei Beobachtungsstellen in beiden entgegengesetzten Richtungen gleich groß erscheint. — Die Schallgeschwindigkeit parallel x' ergibt sich dann k mal so groß als parallel y', wenn $k = \sqrt{(1-(v/c)^2)}$ gesetzt wird. Um den Unterschied zu beseitigen werde die Längeneinheit parallel x' entsprechend verkleinert: „*Lorentz-Deformation*". Nun ergibt sich die Schallgeschwindigkeit zwar nach allen Seiten gleich groß, ihr Wert aber ist ck. Der verlangte Wert c stellt sich ein, wenn durch Verlangsamung des Ganges der Uhren die Zeiteinheit im Verhältnis $k:1$ vergrößert wird: „*Lorentz'sche Änderung der*

Zeitlängen". — 1899 zeigte H. A. Lorentz (Proceedings K. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam, und in französischer Übersetzung in den Archives Néerlandaises), daß für unsere Aufgabe noch eine weitere Umänderung der Maßverhältnisse möglich ist und im Hinblick auf die physikalischen Anwendungen beachtet werden muß: Es können alle Längeneinheiten und die Zeiteinheit gemeinsam in einem beliebigen Ausmaß verändert werden, etwa im Verhältnis $1:l$. Vom System x, y, t aus beurteilt erscheint dann die Längeneinheit parallel y bezüglich x im Verhältnis $1:l$ bezüglich $1:lk$, die Zeiteinheit im Verhältnis $1:(l/k)$ verändert. Dabei ist

$$\text{(L)} \qquad x' = l(x - vt)/k, \quad y' = ly, \quad t' = l(t - vx/c^2)/k.$$

In den so nach H. A. Lorentz (1899) konstruierten Maßsystemen gilt der Satz der Trägheit in der Form, daß sich selbst überlassene Körper sich gleichmäßig und geradlinig bewegen; so will ich sie „*Galilei-Lorentz'sche Maßsysteme*" nennen. In meiner Arbeit über die Gravitation in den physikalischen Annalen Bd. 63, 1920 benutzte ich statt dessen den Ausdruck „Newton-Lorentz'sches Maßsystem". Indem ich mich jetzt der Sitte anderer Autoren füge, bedenke ich, daß der wesentliche Gedanke des Trägheitssatzes ja in der Tat Galilei zu danken ist.

Die Frage, wie das ruhende System erscheint, wenn es vom bewegten System aus beurteilt wird, ist von H. A. Lorentz weder 1899, noch in der für uns gleichfalls sehr wichtigen Arbeit von 1904 behandelt worden. Eine um so größere Rolle spielt sie in jener Arbeit von A. Einstein, in welcher 1905 dessen Relativitätstheorie begründet wurde. Bei den Vergleichen, welche die im System x', y', t' gedachten Beobachter vornehmen, kommt stets ihr eigenes durch t' bezeichnetes Ortszeitsystem in Betracht, das Resultat ist daher nicht leicht zu übersehen. Wie die nähere Untersuchung lehrt, ergibt sich für die Relativgeschwindigkeit wieder der Wert v; ferner findet man bei dem Übergang von x', y', t' zu x, y, t für die Änderungen der Einheiten dieselben Verhältnisse, wie sie soeben für den umgekehrten Übergang angegeben wurden, mit dem einzigen Unterschied, daß nun $1/l$ anstelle von l tritt. Trotz aller physikalischen Unterschiede entsteht hiernach für den Anschein völlige Symmetrie zwischen den Koordinatensystemen, wenn $l = 1$ gesetzt wird.

Für die Elektrodynamik, wo das Licht anstelle des Schalles tritt, schloß H. A. Lorentz 1904 durch Untersuchung der Trägheitserscheinungen, es müsse $l = 1$ gesetzt werden. Zu derselben Folgerung gelangte A. Einstein 1905 durch sein Relativitätsprinzip.

Unser physikalisches Problem führt uns also gerade zu dem Fall der Symmetrie. Für diesen scheint bei dem Übergang von einem System zum anderen, ganz gleichgültig, in welcher Richtung der Übergang geschieht, parallel der Richtung der relativen Bewegung eine Verkürzung der Längen einzutreten und scheinen die Zeiten eine Verlängerung zu erfahren. Hierin und in der Umwandlung der formalen Gleichzeitigkeit ist die wesentliche Änderung beim Übergang zu erblicken, während die Wahl der Achsenrichtungen und des Koordinatenanfangspunktes ohne Bedeutung scheint. Fassen wir die Sache so auf, so ordnet sich bei unserer Annahme $l = 1$ jeder Unterschallschreitung ein bestimmtes Galilei-Lorentz'sches Maßsystem zu, wenn für eines dieser Systeme zwei von den drei Größen: Längeneinheit für eine beliebige Richtung, Zeiteinheit und Zahlwert der Schallgeschwindigkeit, vorgegeben werden. Die Gesamtheit der so sich darbietenden Maßsysteme soll eine „*Lorentz-Gruppe*" genannt werden. Der Zahlwert der Schallgeschwindigkeit ist einer solchen Gruppe im ganzen eigentümlich.

Die Untersuchungen, zu welchen die Relativitätstheorie Anlaß gab, haben gelehrt, daß der Übergang von irgend einem Galilei-Lorentz'schen Maßsystem zu irgend einem anderen derselben Gruppe für den Anschein genau der gleiche ist, wie er vorhin beschrieben wurde. *Werden also nur formale Vergleichungen zwischen den Maßsystemen einer Lorentz-Gruppe ausgeführt, so ist es nicht möglich, das System zu erkennen, welches zur Ruhe gegen das die fundamentale Erregung — z. B. den Schall — tragende Medium gehört.*

§ 5. Der Satz vom gleichen Anschein für Änderungen des Bewegungszustandes.

Stellen wir uns für den Augenblick auf den Standpunkt der älteren Mechanik, welche die Gravitation durch die Newton'schen Kräfte in Rechnung setzt, und vernachlässigen wir jene geringen Änderungen des Maßfeldes für Mechanik und Licht, auf welche die Einstein'sche Theorie aufmerksam gemacht hat, so scheint ein einheitliches Maßfeld gegeben, welches Himmelsmechanik und irdische Mechanik umfaßt, welches mit Einordnung der Lichtschreitungen der Euklid'schen Geometrie entspricht, und welches die Newton'sche Formulierung des Trägheitssatzes erfüllt.

Daß das astronomische Maßfeld der Mechanik, das „*Inertialfeld*", auch für die irdische Mechanik gilt, zeigt sich in der Abplattung der Erde, im Verhalten des Foucault-Pendels, des Kreiselkompasses, in der Ablenkung der Winde vom barometrischen Gradienten und in vielen verwandten Erscheinungen. — Es ist

eine nicht minder wichtige Folgerung der Elektrodynamik — dank besonders den Arbeiten von H. A. Lorentz —, daß bei den zunächst in Betracht kommenden Erscheinungen auch die zum allgemeinen Maßfeld gehörigen Lichtschreitungen im Innern der Materie, und von dieser nicht merklich abhängig, ihre Bedeutung beibehalten. Hier findet man die Lichtschreitungen des Weltenraumes unverändert wieder, wenn man sich die Materie an der betreffenden Stelle zu einer kleinen Höhlung auseinandergerückt denkt. Aber auch in der Materie selbst sind sie wirksam. Der Einfluß, den die Materie so bemerkbar für unsere Sinne auf das Licht ausübt, entsteht nämlich nach der Elektrodynamik nur indirekt, indem unter dem Einfluß der Lichtwellen die elektrischen Teilchen der Materie bewegt werden und dann ihrerseits die Wellen beeinflussen. — Es möge an einige Erscheinungen erinnert werden, welche zu diesen wichtigen Folgerungen geführt haben. O. Lodge, 1893 und 1897, fand, daß das Licht jedenfalls noch nicht 1/1000 der Geschwindigkeit unmittelbar benachbarter schnellrotierender Stahlplatten übernimmt. G. Sagnac, 1913, wies nach, daß in einem rotierenden Spiegelkreis das Licht an der Bewegung des Apparates keinen Anteil nimmt. Fizeau 1851, Michelson und Morley 1881—1886, untersuchten die Mitführung des Lichtes in bewegten Flüssigkeiten, F. Harress 1912 und P. Zeemann 1920 die Mitführung in bewegten festen Körpern. Hier wurde in allen Fällen eine teilweise Mitführung der Lichtwellen gefunden, welche in ihrem Ausmaß genau den vorhin erwähnten indirekten Einfluß der Materie kennzeichnete (F. Harress beging bei der Auswertung der Versuche einen irreführenden Fehler, der von P. Harzer 1914 berichtigt wurde).

Im Einklang mit diesen irdischen Erfahrungen ist die astronomische Aberration des Lichtes. Zwar hat G. Stokes die Ansicht vertreten, es könne für die Erklärung der Aberration ein von der Erde mitbewegter, das Licht tragender Äther angenommen werden, aber es werden dabei, wie H. A. Lorentz zeigte, widerspruchsvolle Voraussetzungen über das Verhalten des Äthers und seine Haftung an der Erdoberfläche gemacht.

Nach alledem scheint es geboten, den das Maßfeld der Mechanik und die Lichtschreitungen tragenden Weltuntergrund, den Äther, auch im Innern der Materie in nicht merklich anderer Beschaffenheit wie im materiefreien Raum und ohne merklichen Anteil an den Bewegungen der Materie anzunehmen. — Um die Nichtanteilnahme des Äthers an der Bewegung der Erde zu prüfen, unternahm A. A. Michelson 1881 seinen berühmten Interferenz-

versuch: Der erwartete Effekt der Erdbewegung zeigte sich aber nicht! — Widersprüche der Art, wie sie hier auftraten, sind für die Physik stets wichtige Ereignisse: sie stellen Fortschritte der Erkenntnis in Aussicht. Zu solchen Fortschritten kam es auch hier: H. A. Lorentz und G. Fitz-Gerald wiesen den Weg: Nicht eine Mitführung des Feldes der Lichtschreitungen ist anzunehmen, was im Widerspruch stände mit allen übrigen Erfahrungen, sondern eine Veränderung der Gestalt der materiellen Körper in Folge ihrer Bewegung durch den Äther. Zunächst nahm H. A. Lorentz nur eine Verkürzung in der Bewegungsrichtung, die sogenannte „Lorentz-Deformation“ an (1892), später (1899) rechnete er auch mit der Möglichkeit einer allgemeinen Dilatation, wie wir sie im vorigen Paragraphen durch den Faktor l kennzeichneten. — Zu dem Michelsonschen Versuch traten andere, welche ebensowenig wie dieser einen Effekt der Erdbewegung im Weltuntergrund erkennen ließen (Rayleigh 1902, Brace 1904, Trouton und Noble 1903). So erweiterte H. A. Lorentz seine Theorie. — 1899 kam er zu dem Schluß, daß Änderungen des Bewegungszustandes eines Körpers mit Änderungen der Dimensionen, der Kräfte und der Trägheit solcher Art verbunden sind, daß sich für den mitbewegten Beobachter ebensolche an die Lichtschreitungen geknüpfte Maßsysteme einstellen, wie sie im vorigen Paragraphen im Anschluß an die Schallausbreitung besprochen wurden. Ebenso wie in meiner Arbeit in den Annalen der Physik, Bd. 63, 1920 über die Gravitation will ich als „*Satz des gleichen Anscheins*“ die Behauptung bezeichnen, daß sich für den Beobachter, wenn das materielle System, dem er angehört, im ganzen eine Bewegungsänderung erfährt, infolge physikalischer Umwandlungen formal veränderte Maßbeziehungen über räumliche und zeitliche Vorgänge einstellen, welche ihm das Urteil über Länge, Gleichzeitigkeit und Zeitverlauf so umwandeln, daß ihm entweder ganz, oder für ein gewisses Erscheinungsgebiet die Veränderungen verhüllt werden. — Ähnliche Anscheinsätze haben in Diskussionen über mathematische, physikalische und philosophische Fragen schon oftmals eine Rolle gespielt. *Für uns schließt sich der „Anscheinsatz für Änderungen des Bewegungszustandes“ an das Licht:* Gerade so wie wir ihn vorhin (S. 36) für den Schall durch die Lorentz-Änderung der Raumlängen und der Zeitlängen künstlich konstruierten, soll er in den Naturvorgängen aus physikalischen Gründen infolge der Verkettung der Materie mit dem Weltuntergrund für das Licht von selbst sich einstellen. *Der Satz des*

gleichen Anscheins gibt so den Lichtschreitungen für die Physik der molekularen Materie eine grundlegende Bedeutung. —

1904 verbesserte H. A. Lorentz seine Theorie sehr wesentlich (Proc. K. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam). Die Theorie wird nun außer auf die stillschweigende Annahme eines allgemeinen Inertialfeldes mit Euklidischer Geometrie auf die folgenden Hypothesen aufgebaut:

1) Das Feld der Lichtschreitungen in der angegebenen Bedeutung ist überall, auch im Innern der Materie, unabhängig von der Materie und ihren Bewegungen. 2a) Die Elektronen, welche im Ruhezustand gegen den Äther als kugelförmige Gebilde anzusehen sind, ändern bei der Bewegung ihre Dimensionen so, daß die Längen parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung $l\sqrt{(1-v^2/c^2)}$ und l mal so groß werden. 2b) Die Kräfte zwischen ungeladenen Teilchen, ebenso wie die Kräfte zwischen geladenen Teilchen und Elektronen werden durch die Translation in genau derselben Weise beeinflußt, wie die elektrischen Kräfte in einem elektrostatischen System. 2c) Es ist $l = 1$. — Als Folge von 2b) gilt der Satz, daß alle materiellen Körper die unter 2a) genannten Deformationen erleiden. — 3a) Für die Elektronen gibt es nur die durch die Ladung bestimmte sogenannte elektromagnetische Masse. 3b) Die Massen aller Teilchen werden durch die Translation ebenso beeinflußt, wie die elektromagnetische Masse der Elektronen. —

Die so begründete Theorie ergibt für den Anscheinsatz die an die Lichtschreitungen geschlossenen Galilei-Lorentzschen Maßsysteme mit $l = 1$. *Zu der Hypothese $l = 1$ wurde H. A. Lorentz geführt, indem er verlangte, es sollten dem Anscheinsatz entsprechend bei Änderung der Bewegung die Maßstabsverschiebungen parallel und quer zur Bewegungsrichtung in gleicher Weise ausgeglichen werden.* —

Nach der Theorie von H. A. Lorentz wird die Materie träger, wenn ihre Geschwindigkeit relativ zum Äther zunimmt, und zwar wächst die Trägheit beim Herangehen an die Lichtschreitungen ins Unendliche. Wird in gewohnter Weise die Masse so definiert, daß Masse × Beschleunigung der Kraft proportional ist, dann ergibt die Theorie

$$m_1 = m_0(1 - v^2/c^2)^{-3/2}, \quad m_2 = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

wobei m_0 die Ruhemasse, m_1 die Masse parallel der Bewegungsrichtung und m_2 die Masse in der Querrichtung bedeutet. — *In diesen Formeln kommt die Lorentz-Deformation zur Geltung, sodaß ihre Prüfung die Prüfung der Hypothese der Lorentz-Deformation ermöglicht.* Darauf wies H. A. Lorentz in seiner Arbeit von 1904 hin, 1½ Jahre vor Entstehen der Relativitätstheorie.

so daß diese an der ersten Fragestellung noch nicht beteiligt war. H. A. Lorentz unternahm damals selbst eine Prüfung, indem er die vorliegenden Untersuchungen von W. Kaufmann über das Verhalten der Elektronenstrahlen im magnetischen und elektrischen Feld heranzog. Die Versuche erwiesen sich für eine Entscheidung als noch nicht genau genug. Bei späteren Beobachtungen konnten die Messungen sehr verschärft werden, und es wurde möglich, die Geschwindigkeit der Elektronen bis in die Nähe der Licht geschwindigkeit hinaufzurücken. *Es ergab sich eine volle Bestätigung der Formeln und damit der Lorentz-Deformation.* Diese Bestätigung ist für unsere theoretischen Ziele deswegen so außerordentlich wichtig, weil hier die Deformation durch *positive* Versuchsergebnisse nachgewiesen wird. Der Einwand, welcher gegen die Beweiskraft der Versuche von Michelson und anderen mit negativem Ergebnis gemacht werden kann, daß nicht eine Deformation einträte, sondern der Äther mitbewegt werde, fällt hier fort. Es verschwindet auch der bekannte Vorwurf, die Annahme der Lorentz-Deformation sei nur „ad hoc“ gemacht worden, um den negativen Ausfall des Michelson-Experimentes zu erklären. —

In der Theorie von H. A. Lorentz erscheint der Satz vom gleichen Anschein als Folge der Verkettung der molekularen Materie mit dem Äther. Eine wesentlich andere Begründung gab A. Einstein 1905 in seiner „Relativitätstheorie“. Es ist anzunehmen, daß der Ausgangspunkt für diese Theorie die Lorentzsche Arbeit von 1899 gewesen ist, denn A. Einstein bezieht sich auf die Lorentzschen Arbeiten und teilt bei dem Wiederabdruck seiner ersten Arbeit 1913 („Das Relativitätsprinzip“, Sammlung von Abhandlungen, bei Teubner) mit, daß er bei ihrer Abfassung die Lorentzsche Arbeit von 1904 noch nicht gekannt habe. A. Einstein knüpft den Anscheinsatz an das Licht durch sein „*Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*“, welches er so formuliert: „Jeder Lichtstrahl bewegt sich im ‘ruhenden’ Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist: Geschwindigkeit = Lichtweg/Zeitdauer, wobei ‘Zeitdauer’ im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist“. — In dem hier erwähnten § 1 wird die Beurteilung der Gleichzeitigkeit gemäß der Lorentzschen Ortszeit vorgeschrieben. —

Im Hinblick auf unseren vorigen Paragraphen ist ersichtlich, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgende 3 Hypothesen zusammenfaßt: 1) Die Lichtschreitungen sind in dem früher erklärten Sinn überall, auch im Innern der Materie unabhängig

von der Materie und ihren Bewegungen. 2) Bei Hinzutreten einer gleichmäßigen Translationsbewegung ändern sich alle Längen so, daß die Lichtausbreitung nach wie vor nach allen Seiten gleichmäßig erscheint. 3) Bei Hinzutreten einer gleichmäßigen Translationsbewegung ändern sich alle Ablaufszeiten so, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum denselben Zahlwert erhält wie vorher.

Diese Hypothesen führen zur Annahme der Lorentz-Deformation und der durch l gekennzeichneten allgemeinen Dilatation. Da das Inertialfeld der Mechanik mit Euklidscher Geometrie stillschweigend angenommen wird, ergeben sich die Galilei-Lorentzschen Maßsysteme für den Anscheinsatz. Als eine abschließende 4. Hypothese tritt bei A. Einstein die Forderung $l = 1$ hinzu. Zu ihrer Aufstellung wird er durch sein „*Relativitätsprinzip*" geführt, welches verlangt, die Änderung der Längen und der Zeiten mit der Geschwindigkeit müßten sich in allen Maßsystemen gleich darstellen. *Es wird demgemäß in der Einstein-Theorie die Symmetrie der Maßsysteme einer Lorentz-Gruppe, welche in der Lorentz-Theorie nicht hervortrat, hier in den Mittelpunkt der Darstellung gerückt.* Das gibt der Relativitäts-Theorie ihr charakteristisches Gepräge. —

Sieht man in dem Relativitäts-Prinzip nur einen formalen Satz, der für einen gewissen Bereich der physikalischen Vorgänge gültig ist, ähnlich wie der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, so besteht kein Widerspruch zwischen der Äthertheorie und der Relativitäts-Theorie. Die Äthervorstellung kann genau in der von H. A. Lorentz gegebenen Weise beibehalten werden. Was A. Einstein brachte, erscheint als eine allgemeiner gehaltene, mehr summarische und dafür in ihrem Bereich vollkommenere Ausführung der Theorie. A. Einstein ging freilich schon in seiner ersten Arbeit weiter, indem er annahm, die Maßsysteme einer Lorentz-Gruppe seien für alles Naturgeschehen ohne jede mögliche Ausnahme gleichwertig. Dadurch wurde dem Anscheinsatz über die Physik hinaus eine erkenntnistheoretische Bedeutung gegeben. Es ist sehr bemerkenswert, daß verschiedene Autoren dieses so aufgefaßt haben, als ob die physikalischen Hypothesen nun beseitigt wären. Daß ein solcher Standpunkt durchaus unhaltbar ist, folgt sofort, wenn man bedenkt, daß ja schon die Grundlage des Anscheinsatzes, die Annahme der festen Lagerung der Lichtschreitungen hypothetisch ist. Es handelt sich hier um eine Erfahrung, die nicht nur psychologisch interessant, sondern auch für die Physik wichtig ist. Die Verwertung des Relativitätsgedankens scheint vielen so selbstverständlich, daß darüber

das Gefühl für das Hypothetische, was seine Anwendung erst möglich macht, ganz verloren geht.

Die Lorentz-Deformation ist im selben Sinne eine „physikalische Erscheinung“ wie jeder andere Vorgang und verlangt im gleichen Sinne eine physikalische „Erklärung“.

Die Einsteinsche „*allgemeine Relativitätstheorie*“ nimmt für „lokale“ Messungen (genau genommen für Messungen in unendlich kleinen Bereichen der Welt), die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie als zutreffend an. So bleibt der Anscheinsatz für wechselnde Bewegungszustände mit dieser Einschränkung bestehen.

§ 6. **Wertigkeit der Schreitungen.**

Für den an die Schallschreitungen geschlossenen künstlichen Anscheinsatz des § 4 besteht die Gleichwertigkeit der Unterschallschreitungen unter sich nur formal, nicht allgemein physikalisch. Es ist z. B. für die Schreitung, welche Ruhe gegen die Luft bedeutet, der Gang der Uhren tatsächlich schneller, als bei jeder anderen Schreitung. So entsteht die wichtige Frage, ob für den an die Lichtschreitungen geschlossenen physikalischen Anscheinsatz die Unterlichtschreitungen unter sich und die Überlichtschreitungen unter sich nur formal gleichwertig sind, oder ob die Gleichwertigkeit in jeder physikalischen Hinsicht ohne Ausnahme bestehe.

Die Wichtigkeit der Frage verlangt es, ihren Sinn völlig klar zu stellen. So will ich sie unter Benutzung eines übersichtlichen Falles noch besonders erläutern. Im Weltenraum fern von den Gestirnen wählen wir für Gedanken-Experimente einen Beobachtungsraum, in welchem die Maßverhältnisse für Mechanik und Optik nicht merklich variieren. Für die Experimente dienen Körper, die wir „Weltkörper“ nennen, welche so klein sind, daß es genügt, die Gravitation gemäß dem Newtonschen Gesetz zu berücksichtigen und im übrigen ihren Einfluß auf das Maßfeld zu vernachlässigen. Wir dürfen trotzdem die Weltkörper immerhin so groß annehmen, daß auf ihnen physikalische Beobachter vorausgesetzt werden können. Für die Beobachtungen stellen wir im Sinne des Anscheinsatzes gleiche Maßstäbe und Uhren zur Verfügung. Besonders zweckmäßig scheint es zu sein, die Längeneinheit durch Hinweis auf Atomreihen in einem bestimmten Kristall, die Zeiteinheit durch Hinweis auf die Schwingungszeit einer gewissen Spektrallinie festzustellen, denn dann können die Beobachter ihr Meßgerät jederzeit selbst „eichen“.

Die Weltkörper mögen nun ohne Drehung verschiedene Schreitungen erhalten. Nach dem Anscheinsatz werden die Beobachter auf

allen Weltkörpern den gleichen Eindruck von den physikalischen Verhältnissen und Vorgängen gewinnen. Es wird ihnen insbesondere die Lichtgeschwindigkeit als gleich groß erscheinen. Ein jeder darf bei Austausch der Beobachtungsbücher von Weltkörper zu Weltkörper die fremden Beobachtungen ohne weiteres ebenso verwerten wie die eigenen. So scheinen also alle Schreitungen für die physikalischen Vorgänge gleichwertig. Die Frage ist nun, besteht die Gleichwertigkeit nicht nur für den Anschein, sondern auch wirklich? Oder kann man zum Beispiel doch behaupten, daß die Vorgänge bei den verschiedenen Schreitungen verschieden schnell verlaufen?

Wie die Darstellung klar erkennen läßt, ist unsere Frage nicht etwa so aufzufassen, es solle beim Übergang von einer Schreitung zur anderen auch das System der Lichtschreitungen, also der Weltuntergrund als Träger derselben, eine Änderung des Bewegungszustandes erleiden, welche dem Hinzutreten einer Geschwindigkeit im Sinne der gewöhnlichen Vektorzusammensetzung der Geschwindigkeiten entspricht. Ebensowenig soll beim Übergang von einer Schreitung zur anderen in einer kühnen Vorstellung die ganze Welt mit ihrem gesamten Inhalt an Materie und Weltuntergrund eine solche Zusatzgeschwindigkeit erhalten. Derartige Gedanken würden zu einem ganz anderen Problem führen als jenes, welches uns hier beschäftigt. *Man könnte dieses andere Problem recht gut mit der gewöhnlichen Physik und mit Machschen Überlegungen, sogar mit Formeln der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie in Verbindung bringen, wir würden aber dem Bereich des an die Lichtschreitungen geschlossenen Anscheinsatzes und damit auch dem jetzt zur Untersuchung gestellten Bereich der Einsteinschen Relativitätsprinzipien entrückt.* —

Fassen wir also nun unsere Frage ins Auge. Nach dem Satz vom gleichen Anschein kann die Materie in den uns vertrauten physikalischen Zuständen nur in Unterlichtschreitungen bestehen; Gestalt und Masse werden nach den Formeln für Überlichtschreitungen im mathematischen Sinne „imaginär“. Andererseits können nach dem Satz des gleichen Anscheins nur die Überlichtschreitungen formal „Gleichzeitigkeit“ darstellen. So zeigt sich denn nicht nur, daß unter den möglichen Schreitungen die Lichtschreitungen sich physikalisch auszeichnen, sondern auch, daß die Lichtschreitungen die Gesamtheit der Schreitungen in zwei physikalisch völlig verschiedene Gebiete teilen. Daran knüpfte ich in meiner Arbeit von 1911 den Schluß, es sei angesichts des tatsächlich bestehenden Unterschiedes unter den Schreitungen natürlich,

nun auch anzunehmen, die Unterlichtschreitungen und ebenso die Überlichtschreitungen seien unter sich physikalisch ungleichwertig. Hiergegen wandte sich M. v. Laue 1912 mit einem seiner beiden in der Einleitung erwähnten Einwände. Er sagte: „Die Einsteinsche Auffassung des Relativitätsprinzipes muß notwendig das Vorkommen von Überlichtschreitungen leugnen. Von der Nicht-Existenz gewisser an sich denkbarer Schreitungen auf verschiedene Wertigkeit der möglichen Schreitungen zu schließen, geht aber nicht an“. *Es zeigt sich so zwischen M. v. Laue und mir ein weitgehender Unterschied im physikalischen Empfinden.* Der gleiche Unterschied mag wohl auch sonst zur Geltung kommen; wir wollen dem Rechnung tragen, indem wir dem physikalischen Instinkt mißtrauen und uns nach zwingenderen Schlüssen umsehen.

Ich führe im Folgenden zwei Beweise durch, deren Gedankengänge auch in meiner Arbeit von 1911 benutzt wurden; dabei hoffe ich, Verbesserungen zu bringen. Der erste Beweis verwertet die Änderung der Ablaufsgeschwindigkeit der physikalischen Vorgänge und benutzt das „*Beispiel der 3 Schreitungen*“, wie ich es nennen will. Dieses wurde schon 1905 von A. Einstein in seiner die Relativitätstheorie begründenden Arbeit angedeutet und spielt seitdem in mannigfachen Anwendungen eine Rolle. — In der gewöhnlichen Form besteht das Beispiel darin, daß — etwa in dem vorhin gedachten „Beobachtungsraum“ — zwei Körper in ihren Zuständen zu zwei Zeitpunkten verglichen werden, wo sie sich beieinander befinden; dazwischen bleibt der eine Körper „sich selbst überlassen“, während der andere Bewegungsänderungen erfährt. Da durch die Bewegungsänderungen in die Überlegungen gewisse Schwierigkeiten hineingebracht werden, die zu vermeiden nützlich ist, will ich dem Beispiel jetzt eine etwas andere Form geben: Es sollen drei Körper benutzt werden, die alle während der Dauer des Versuches „sich selbst überlassen“ sind, jedoch alle in verschiedenen Schreitungen. Im Zeitpunkt (1) sollen A und B, in dem späteren Zeitpunkt (2) B und C, in dem noch späteren Zeitpunkt (3) C und A aneinander vorübergehen. Drei gerade Linien als Bahnen der Weltkörper, welche sich in den Punkten (1), (2), (3) schneiden, versinnbildlichen den Versuch. Der Zustandsverlauf des Körpers C ist gewissermaßen als Fortsetzung des Zustandsverlaufes von B anzusehen. Derselbe physikalische Vorgang finde auf allen drei Körpern statt. Man kann zum Beispiel die Lichtschwingungen einer bestimmten Spektrallinie ins Auge fassen, wie es H. A. Lorentz bei der Erläuterung seiner Theorie 1899 tat. Es werden dann auf jedem der Weltkörper die Lichtschwingungen

zwischen den beiden Vorübergängen an den anderen Weltkörpern gezählt. Wir vergleichen die Summe der Schwingungen auf B und C, die mit dem Vorübergang von B an A beginnen und mit dem Vorübergang von C an A enden, mit der Zahl der Schwingungen auf A während der gleichen Periode. Der Anscheinsatz sagt dann aus, es sei jene Summe größer als diese Zahl. Man erkennt das sofort, wenn man bedenkt, daß in einem mit A verbundenen Bezugsystem B und C in Bewegung sind, und deshalb der Ablauf der Vorgänge auf ihnen verglichen mit denen auf A langsamer geschieht. Den End-Unterschied kann man beliebig vergrößern, indem man die Schreitungen von B und C den Lichtschreitungen genügend nahebringt. Man kann sich zum Beispiel vorstellen, daß auf B und C zusammengenommen nur eine Schwingung ausgeführt wird, während auf A Billionen von Schwingungen stattfinden. Einer oft benutzten, zuerst wohl von A. Einstein verwerteten Ausführung des Beispiels der drei Schreitungen entsprechend, kann man sich die Lichtschwingungen auch durch die Lebenstätigkeit von menschenähnlichen Geschöpfen ersetzt denken, die A, B und C bewohnen. Man darf dann annehmen, daß die Bewohner auf B und C zwischen den Treffzeiten gerade nur Zeit zu je einer Mahlzeit fanden, während auf A beliebig viele Generationen in Tod und Geburt einander ablösten. — Mein Schluß ist nun folgender: Bei der Unbestimmtheit in Bezug auf die Feststellung der „Gleichzeitigkeit" an verschiedenen Orten, welche der Anscheinsatz offen läßt, ist es nicht möglich, den Zeitpunkt (2) einem bestimmten Zeitpunkt zwischen (1) und (3) zuzuordnen, wir wissen nur, daß der Zeitpunkt (2) zwischen den Zeitpunkten (1) und (3) liegt; aber dennoch zeigt der Versuch mit Sicherheit, daß zum mindesten bei einem der beiden Bewegungszustände, die B und C besitzen, der Ablauf der Vorgänge *wirklich* langsamer sein muß, als auf A. *Es folgt, daß bei Annäherung eines Körper an die Lichtschreitungen die Verzögerung des Ablaufs der Vorgänge auf ihm nicht nur scheinbar, sondern „wirklich" eintreten muß und zwar bis zu jedem beliebigen Grad.*

Gegen meine entsprechenden Überlegungen von 1911 richtete sich der zweite der in der Einleitung erwähnten Einwände von M. v. Laue. Zwischen den Raumzeitpunkten (1) und (3) sei zwar jener Weg, welcher von einem sich selbst überlassenen Körper eingeschlagen wird, dadurch ausgezeichnet, daß auf ihm die physikalischen Vorgänge den größten Fortschritt zeigen, aber diese Auszeichnung liege nicht in den Naturgesetzen, sondern in der Wahl der Raumzeitpunkte (1) und (3): „Eine der wichtigsten

sten physikalischen Erkenntnisse ist die der physikalischen Gleichwertigkeit aller Richtungen im (dreidimensionalen) Raum; und eines der elementarsten geometrischen Gesetze lautet, daß zwei Punkte eine gerade Linie, damit auch eine Richtung bestimmen. Es entspräche dem obigen Einwand gegen die Relativitätstheorie, wenn man jenes Gesetz der Isotropie des Raumes mit Hülfe dieses geometrischen Satzes widerlegen wollte". In dieser Überlegung liegt nichts, was meinen Beweis entkräftete. Je größer bei dem Beispiel der drei Schreitungen der „Umweg" zwischen den Raumzeitpunkten (1) und (3) ist, der durch die Bahnen von B und C gegeben wird, um so kleiner wird der Fortschritt der physikalischen Vorgänge. Dies bedeutet einen grundsätzlichen Unterschied gegenüber dem geometrischen Analogon, und gerade diese besondere physikalische Charakteristik ermöglicht den Beweis. —

Der zweite Beweis verwertet die Lorentz-Transformation. Er knüpft an ein Gedankenexperiment, welches ich das „*Beispiel des Stafettenlaufes*" nennen will. Zwei Beobachtungsstände A und B in relativer Ruhe seien gegeben. Zwei gleiche Körper in Form von Stäben, die parallel der Strecke A, B liegen, mögen bei nacheinander folgenden Versuchen mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung auf der Bahn A, B sich bewegen und zwar so, daß sie gleichzeitig bei B vorübergehen. Für die Rückkehr zu A löst dann der zweite Körper bei B den ersten ab. Bei den Versuchen soll die Laufgeschwindigkeit schließlich unendlich nahe an die Lichtgeschwindigkeit herangehen. Die Laufzeit zwischen Ausgang von A und Rückkehr zu A nähert sich dann der Laufzeit des Lichtes an und bleibt also endlich, eine endliche relative Laufbewegung durch den Raum anzeigend. — l sei die bei beiden Stäben gleiche „Ruhelänge" der Stäbe. τ sei die Zeitdifferenz, mit welcher an irgend einem auf der Bahn A, B gewählten Punkt die beiden Enden eines Stabes nacheinander vorübergehen. τ nähert sich dann wegen der Lorentz-Deformation an 0 an, wenn die Laufgeschwindigkeit an die Lichtgeschwindigkeit heranrückt. Beurteilt nach den Werten von l/τ scheint hiernach die Geschwindigkeit der aus den beiden Stäben gebildeten Stafette unendlich groß zu werden, während doch die Endlichkeit der Rückkehrzeit des zweiten Gliedes der Stafette zu A klar beweist, daß die Bewegung der Stafette nicht unendlich schnell erfolgte. Die Lösung des Widerspruches zwingt zu der Annahme, daß die Lorentz-Kontraktion im Weltgeschehen etwas Wirkliches ist und nicht nur für den Anschein besteht. *Wir müssen also annehmen, daß die Gestalt der Körper sich nicht nur scheinbar, sondern*

wirklich ohne Grenzen abflacht, wenn die Schreitung an die Lichtschreitungen herangeht.

Beide Beweise zeigen, daß die Unterlichtschreitungen unter sich ungleichwertig sind, und es müssen also auch die Galilei-Lorentzschen Maßsysteme als physikalisch ungleichwertig gelten, welche ihnen zugehören. Auch die Systeme der Gleichzeitigkeit werden physikalisch ungleichwertig, und es ist auf die physikalische Ungleichwertigkeit der Überlichtschreitungen unter sich zu schließen.

§ 7. **Die Gravitation.**
Erweiterung des Anscheinsatzes auf das Gravitationsfeld.

Das wesentliche Ergebnis der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie möchte ich darin sehen, daß sie lehrt, als die Ursache der Gravitation Unterschiede des Äthers zu erkennen, welche sich in Änderung der zum Anscheinsatz gehörigen Maßbeziehungen von Ort zu Ort äußern, welche also insbesondere durch Änderung des Systemes der Lichtschreitungen angezeigt werden. Alles Übrige verblaßt für mich gegenüber der Wichtigkeit dieser Erkenntnis, und ich möchte in dem Übrigen auch nur Zutaten sehen, welche zwar einen wertvollen ersten Entwurf, aber nicht einen definitiven Rahmen für die Theorie gegeben haben.

Es sei erlaubt, *meine eigene Theorie der Gravitation* (diese Nachrichten, Mai 1920, Astron. Nachr. B. 211, Ann. d. Phys. B. 63) voranzustellen, weil sie den hervorgehobenen Grundgedanken in einfacherer und in gewissem Sinne allgemeinerer Weise zur Geltung zu bringen sucht, als die Einsteinsche Theorie. Ich ziehe nur den Fall des *stationären Gravitationsfeldes* in Betracht, indem ich annehme, etwaige Änderungen erfolgten so langsam, daß die Beschaffenheit des Weltuntergrundes sich niemals merklich von der des stationären Falles unterscheidet. Ferner suche ich mit der Annahme der *„relativen Isotropie“* des Äthers auszukommen, d. h. ich setze bezogen auf ein homogenes Koordinatensystem die Lichtgeschwindigkeit c an jeder Stelle nach allen Seiten gleich groß. Im Übrigen muß angenommen werden, daß c im allgemeinen von Ort zu Ort variiert. —

Die Trägheit der Materie ist gemäß der modernen Elektrodynamik durch die Verkettung der Materie mit dem Äther zu erklären. Dementsprechend setze ich voraus, daß auch die Verkettung der Materie mit dem Äther, welche sich in der Gravitation zeigt, elektrodynamischen Ursprungs ist. Um diesen Gedanken durchzuführen, verfahre ich ähnlich wie H. A. Lorentz 1904, indem ich folgende Hypothese wähle: *Alle Atome der Materie verhalten*

sich elektrodynamisch ebenso wie die Elektronen; die Elektronen ihrerseits verhalten sich so, als wären sie im Falle der Ruhe gegen den Äther Kugeln mit Oberflächenladung. — In der Elektrodynamik wurde gezeigt (M. Abraham 1902—1903, H. A. Lorentz 1904), daß für nicht zu schnelle Bewegungsänderungen das mechanische Verhalten der Elektronen im homogenen Maßfeld den Lagrange'schen Gleichungen

$$-(\partial L/\partial x) + d(\partial L/\partial \dot{x})/dt = X, \qquad L = L_0 \sqrt{(1 - (v/c)^2)}$$

genügt, wobei X die von außen einwirkende Kraft in der x-Richtung, L die „Lagrange'sche Funktion", L_0 ihr Wert bei Ruhe, v die Geschwindigkeit des Elektrons relativ zum Äther bedeutet. Dabei ist $L_0 = -m_0 c^2$, wenn m_0 die Ruhemaße bezeichnet, und es ergeben sich die S. 41 mitgeteilten Lorentz'schen Gesetze über die Abhängigkeit der Trägheit von der Bewegung. Die angegebenen Formeln sollen nach der eben aufgestellten Hypothese für alle Atome der Materie gültig sein; speziell für Elektronen mit Oberflächenladung ist $L_0 = -(2e^2)/3a$, wobei a den Radius bedeutet. — Nach dem Vorgang von M. Abraham verwerte ich die *Hypothese, daß die Formeln auch im inhomogenen Maßfeld, bei Variation von c ihre Gültigkeit behalten. Dann ergibt sich ohne weiteres eine Theorie der Gravitation.*

Zur analytischen Formulierung der Theorie, soweit sie bisher angedeutet wurde, ist die Einführung zweier Konstanten nötig, welche die Abhängigkeit etwa von L_0 und e von dem Ortswert c der Lichtgeschwindigkeit darstellen. Ich setze $(L_0/\bar{L}_0) = (c/\bar{c})^{1/\gamma}$ und $(e/\bar{e}) = (c/\bar{c})^{\varrho}$, wobei γ und ϱ die beiden Konstanten sind. Die überstrichenen Symbole kennzeichnen ein zusammengehöriges Wertsystem. Es folgt $(a/\bar{a}) = (c/\bar{c})^{2\varrho-(1/\gamma)}$, $(m_0/m_0) = (c/c)^{(1/\gamma)-2}$. Unter a kann hier irgend eine Länge in einer Molekel verstanden werden. *Die Gravitation erscheint nach der Theorie verursacht durch das Zusammenwirken zweier Anteile. Der vorherrschende Anteil ist analog der Kraft, die in einer nichtleitenden Flüssigkeit mit von Ort zu Ort variabler Dielektrizitätskonstanten einen elektrischen Körper von Stellen niederer zu Stellen höherer Dielektrizitätskonstanten treibt. Der andere Anteil ist analog der Kraft, welche in einer Flüssigkeit mit von Ort zu Ort veränderlichem Druck eingebettete Körper von Stellen höheren zu Stellen niederen Druckes treibt.*

Zur Vervollständigung der Theorie ist noch zweierlei festzustellen: Zunächst der Einfluß der Materie auf die Ätherbeschaffenheit; das bedeutet die Einführung der Gravitationskonstanten. Dann das Gesetz, nach welchem im Felde die Ätherbeschaffenheit variiert. Den physikalischen Erfahrungen entsprechend nehme ich

an, es gelte eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form $\Delta c^n \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} c^n = 0$, oder $\Delta c = (1-n)(\operatorname{grad} c)^2/c$, wobei n eine weitere dem Äther eigentümliche Größe ist. Dem Wert $n = 0$ entspricht $\Delta \log c = 0$. —

An verchiedenen Stellen des Gravitationsfeldes verlaufen nach der Theorie die gleichen physikalischen Vorgänge verschieden schnell. Sind τ und $\bar{\tau}$ entsprechende Zeiten an zwei verschiedenen Stellen, so ergibt sich $(\tau/\bar{\tau}) = (c/\bar{c})^{2\varrho-1-(1/\gamma)}$. Es folgt $(a/\tau)(\bar{a}/\bar{\tau}) = (c/\bar{c})$, und diese Gleichung sagt aus, daß bei lokalen Messungen, wenn Maßstab und Uhr vorgeschrieben sind — etwa durch die Atomreihen eines Kristalls und eine Spektrallinie —, die Lichtgeschwindigkeit im Gravitationsfeld sich überall gleich groß ergibt. *So führt die Theorie zu einer Erweiterung des Anscheinsatzes auf das Gravitationsfeld,* denn es verlaufen nach ihr die physikalischen Vorgänge an verschiedenen Stellen im Gravitationsfeld in solcher Weise, daß bei nur lokaler Beobachtung, wo die Koordinatensysteme durch den vorgeschriebenen Maßstab und die vorgeschriebene Uhr bestimmt werden, Unterschiede nicht zutage treten. —

Meine Theorie ergibt im Gravitationsfeld eine Lichtablenkung proportional mit γ, eine Rotverschiebung der Spektrallinien (bestimmt durch $\tau/\bar{\tau}$) proportional mit $\sigma = 1 - \gamma(2\varrho - 1)$, eine Perihelbewegung der Planeten proportional mit $q = \gamma(n+4) - 2$. Der Einsteintheorie würden die Werte $\gamma = 2$, $\sigma = 1$, $q = 6$ zukommen. — Die Beobachtungen führen heute noch zu keiner Sicherheit über die Werte der γ, σ, q. Ich möchte zur Zeit die Werte $\gamma = 2$, $\sigma = 1/3$, $n = -1/3$, entsprechend $q = 5\,1/3$ für die wahrscheinlichsten halten. Vielleicht kommt auch $n = 0$ in Betracht. Man erkennt, daß die Beobachtungen auf durchaus „vernünftig“ scheinende Werte für die Grundkonstanten der Theorie hindeuten. —

Charakteristisch für die Einstein'sche Theorie ist die Verwertung der Vorstellung des Minkowski'schen vierdimensionalen Raumes und des zugehörigen Raum-Zeit-Längenelementes. Man denke sich zunächst ein homogenes Gebiet des Maßfeldes. Irgend zwei unendlich benachbarte Raumzeitpunkte x, y, z, t, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $t+dt$ kennzeichnen durch dx, dy, dz, dt eine Schreitung, welche in dem gewählten Koordinatensystem die Geschwindigkeit $v = dl/dt$, $dl = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ darstellt. Die Lorentz'schen Transformationsgleichungen (L) Seite 37 für $l = 1$ ergeben, daß die Größe $ds^2 = dl^2 - c^2 dt^2$ in allen Galilei-Lorentz'schen Maßsystemen einer Gruppe denselben Zahlwert hat. Für $ds^2 > 0$, $v > c$ (Überlichtschreitung) findet sich ein Maßsystem, in welchem $dt = 0$, $ds = dl$ wird; in diesem kann ds als Raumlänge durch einen ruhenden

Maßstab gemessen werden. — Für $ds^2 < 0$, $v < c$ (Unterlichtschreitung) findet sich ein Maßsystem, in welchem $dl = 0$, $ds = cdt\sqrt{(-1)}$ wird; in diesem kann $ds/(c\sqrt{(-1)})$ als Zeitlänge durch eine ruhende Uhr (gegeben etwa durch die Lichtschwingungen einer Spektrallinie) gemessen werden. — Für $ds = 0$ wird $v = c$, die Gleichung $ds = 0$ stellt also das System der Lichtschreitungen dar. — In den Formeln für ds verhält sich $c\,dt\sqrt{(-1)}$ gerade so wie dx, dy, dz; *die mit dem Faktor* $\sqrt{(-1)}$ *versehene Zeit wird gleichwertig mit einer Raumkoordinate:* Daran knüpft sich die mathematische Vorstellung eines aus dem gewöhnlichen Raum und der imaginären Zeit gebildeten vierdimensionalen Raumes. *ds erscheint als vierdimensionales Längenelement* und hat physikalisch die höchst merkwürdige Bedeutung, daß es sich bald als Raumlänge gewöhnlicher Art, bald als imaginäre Zeitlänge darstellt, und mit dem Wert 0 die Lichtschreitungen kennzeichnet. ds nenne ich das *„Minkowskische Raumzeit-Element“*. Doch ist hier zu bemerken, daß in den Darstellungen der Relativitätstheorie ds^2 öfters das entgegengesetzte Vorzeichen zu erhalten pflegt. —

Es wurde soeben der Anscheinsatz der Bewegung als gültig angenommen und daran die Vorstellung des vierdimensionalen Raumes mit seinem eigenartigen Längenelement geschlossen. Für die Beurteilung der Einstein'schen Relativitätstheorie ist es wichtig, nun die Betrachtungsweise umzukehren. Vorangestellt werde jetzt die Vorstellung des vierdimensionalen Raumes, der aus dem gewöhnlichen Raum und der mit dem Faktor $c\sqrt{(-1)}$ versehenen Zeit konstruiert wird. Seinem Längenelement legen wir die von Minkowski angegebene Bedeutung bei. Zur Durchführung der Vorstellung denken wir uns einen Normalmaßstab (Atomreihen in einem Kristall) und eine Normaluhr (Spektrallinie) vorgeschrieben. c bedeute die mit Hülfe dieses Meßgeräts an irgend einer Stelle gemessene Lichtgeschwindigkeit. Die Länge eines Elementes ds kann dann bei sinngemäßer Anwendung durch den Maßstab oder die Uhr beurteilt werden, jenachdem sie reell oder imaginär ist. — Weiter nehmen wir an, daß zu jeder vorgeschriebenen Schreitung ein Galilei'sches Koordinatensystem mit Euklid'scher Geometrie konstruiert werden könne. Für dieses erlaubt der Maßstab die Konstruktion eines rechtwinkligen Axenkreuzes x, y, z; die Uhr erlaubt für jede Stelle den Zeitverlauf zu messen. Das Ortszeitsystem bleibt zunächst noch unbestimmt; dessen Feststellung soll durch eine vorbereitende Überlegung eingeleitet werden. Ein beliebiger materieller Stab der Länge Δl werde ausgewählt und in irgend einer Richtung in Ruhe zum Koordinatensystem gehalten.

$2\Delta t$ sei die Zeit des Licht-Hinundherganges längs des Stabes, sodaß $\Delta l/\Delta t$ als Lichtgeschwindigkeit erscheint. Das Meßresultat ist hier völlig bestimmt, da das Ortszeitsystem nicht eingeht. Sowohl die Lichtschreitungen, als auch das Verhalten der materiellen Körper bei Änderung der Lage ist nach dem Gedanken der Körperrelativität durch die Beziehungen zur Welt im Ganzen bestimmt. Wäre Beides unabhängig von einander, so müßte erwartet werden, daß Δt mit der Orientierung des Stabes variiere: *Wir verwerten also eine Hypothese über den Weltuntergrund und seine Beziehungen zur Materie, wenn wir nun die Annahme machen, daß Δt von der Orientierung des Stabes unabhängig sei.* — Kehren wir zur Konstruktion des Maßsystemes zurück. Wir nehmen an, es sei möglich, das Ortszeitsystem so zu wählen, daß

$$\text{(M)} \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (c\,dt\sqrt{(-1)})^2 = dl^2 - c^2\,dt^2$$

wird. In der Sprechweise der Geometrie nehmen wir dann an, es könne im vierdimensionalen Raum die Zeitaxe auf die drei Raumaxen „senkrecht" gestellt werden. — Da $ds^2 = 0$ die Lichtschreitungen angeben soll, so folgt, daß die durch $dl^2 - c^2\,dt^2 = 0$ bestimmte Lichtgeschwindigkeit für alle Richtungen den gleichen Wert c erhält; *die Formel* (M) *setzt also ein Galilei-Lorentz'sches Maßsystem voraus* (§ 4). Insbesondere erscheint die Lichtgeschwindigkeit für Hinundhergang von der Richtung unabhängig: *Wir erkennen, daß die Annahme der Formel* (M) *die soeben formulierte Hypothese über Weltuntergrund und Materie verlangt.*

Es mögen nun zwei verschiedene Schreitungen mit den Galilei-Lorentz'schen Maßsystemen x, y, z, t und x', y', z', t' angenommen werden. Jeder Raumzeitpunkt wird dann durch ein bestimmtes Wertsystem x, y, z, t und ein bestimmtes Wertsystem x', y', z', t' gekennzeichnet, und diese Wertsysteme sind nach § 4 durch die Lorentz-Transformationsgleichungen (L) verbunden. Nun soll ds für jedes Paar unendlich benachbarter Raum-Zeitpunkte in beiden Koordinatensystemen seiner Bedeutung gemäß denselben Wert erhalten, also muß $l = 1$ sein, und es ergibt sich so der an die Lichtschreitungen geschlossene Anscheinsatz. Wir erkennen: *Die Verwendung der Raumzeitlängen in der von Minkowski angegebenen Bedeutung ist äquivalent mit der Annahme des an die Lichtschreitungen geschlossenen Anscheinsatzes der Bewegung.* Diese Verwendung setzt also drei Hypothesen voraus: Die Hypothese der festen Lagerung der Lichtschreitungen, der Lorentz-Deformation und der Lorentz-Änderung der Ablaufgeschwindigkeit zeitlicher Vorgänge.

Wird das orthogonale Koordinatensystem $x, y, z, ct\sqrt{(-1)}$ durch

ein beliebiges Raum-Zeit-Koordinaten-System x_1, x_2, x_3, x_4 ersetzt, so ergibt sich für ds die Darstellung $ds^2 = S g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$.

Die Minkowski'sche Theorie entsprach der speziellen Relativitätstheorie. Da hatte der vierdimensionale Raum die „*Euklid'schen*" Maßeigenschaften. In der allgemeinen Relativitätstheorie von A. Einstein wechseln die Maßeigenschaften von Stelle zu Stelle und ist so das Wesen des Gravitationsfeldes charakterisiert. Es wird angenommen, daß für jede Stelle in unendlich kleinem Bereich die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gültig bleiben. *Damit wird also für jede Stelle der Anscheinsatz der Bewegung angenommen.*

Bei Vergleich verschiedener Stellen des vierdimensionalen Raumes gilt nach der Einstein'schen Theorie die Minkowski'sche Raumzeitlänge als entscheidend für die Maßverhältnisse. Es muß demgemäß bei dem Vergleich verschiedener Stellen für ds die Übertragung durch den vorgegebenen Normal-Maßstab und die vorgegebene Normal-Uhr vorgenommen werden. Bedeutet $\bar{c}$ den Wert der Lichtgeschwindigkeit für jene Stelle, an welcher s durch Maßstab und Uhr gekennzeichnet wird, so ist nun überall bei reellem Wert des Raumzeitlängen-Elementes $ds = d\lambda$ zu setzen, wenn $d\lambda$ den Längenwert bezeichnet, welchen die Teilung des Maßstabs angibt, und überall bei imaginärem Wert des Raumzeitlängen-Elementes gilt $ds = \bar{c}\, d\tau \sqrt{-1}$, wenn $d\tau$ der Uhrangabe entspricht. — Es möge nun für einen unendlich kleinen Bereich ein orthogonales Koordinatensystem mit Hülfe des Maaßstabes und der Uhr konstruiert werden, sodaß $ds^2 = dl^2 - c^2 dt^2$ wird und hier für ruhenden Maßstab und ruhende Uhr direkt $dl = d\lambda$, $dt = d\tau$ wird. Beachtet man weiter die Bedeutung von ds, so folgt $c = \bar{c}$: Lokale Messungen ergeben hiernach überall den gleichen Wert der Lichtgeschwindigkeit. Wir erkennen, daß die Einstein'sche Verwertung des Raum-Zeit-Elementes im Gravitationsfeld die folgende *Hypothese* verlangt: *Beim Übergang von einer Stelle zu einer anderen werden die Längen der materiellen Körper und die Ablaufsgeschwindigkeiten der physikalischen Vorgänge in ihnen so geändert, daß mit demselben Meßgerät sich bei lokalen Messungen überall derselbe Wert der Lichtgeschwindigkeit ergibt.* Der Anscheinsatz gilt also bei Vergleich verschiedener Stellen des Gravitationsfeldes in der Einstein'schen Theorie gerade so wie in meiner Theorie. Es folgt: *Die Verwendung der Minkowski'schen Raumzeitlänge, auf welche die Einstein'sche Theorie sich gründet, ist gleichbedeutend mit der Hypothese des an die Lichtschreitungen geschlossenen erweiterten Anscheinsatzes; dieser Satz wird also nicht nur für Änderungen der Bewe-*

gung, sondern auch für den Übergang von einer Stelle des Gravitationsfeldes zur anderen angenommen.

Da der erweiterte Anscheinsatz auch für meine Theorie gilt, läßt auch sie sich unter Benutzung der Minkowski'schen Raumzeitlänge darstellen. Ihr entspricht der in den Ann. d. Phys., B. 63, S. 370 gegebene, für ein homogenes Koordinatensysten geltende Ansatz: $ds^2 = (\bar{a}/a)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (\bar{\tau}/\tau)^2\bar{c}^2\,dt^2$. —

Die Einstein'sche Theorie rechnet mit der allgemeinsten Anordnung der Maßbeziehungen, welche bei beliebig gewähltem Raumzeit-Koordinatensystem der Formel $ds^2 = S\, g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$, $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ entsprechen. Die Lichtschreitungen gehören zu $ds = 0$. Wird demgemäß zur Konstruktion der „Strahlengeschwindigkeitsfläche" für irgend eine Stelle von einem Punkt aus in den verschiedenen Richtungen die Lichtgeschwindigkeit als Radiusvektor aufgetragen, so entstehen für die nach der Theorie möglichen Maßsysteme im allgemeinen exzentrische dreiaxige Ellipsoide, wobei die Axenkreuze und Exzentrizität von System zu System variieren. Die verschiedenen Formen der Ellipsoide zeigen relative Anisotropie an; die verschiedene Exzentrizität bedeutet, daß im allgemeinen die nach der Theorie möglichen Systeme der Lichtschreitungen gegeneinander im ganzen in relativer Bewegung begriffen erscheinen. 9 der 10 durch die $g_{\mu\nu}$ gegebenen Bestimmungsstücke für das Maßfeld ergeben so das System der Lichtschreitungen; das zehnte Bestimmungsstück ist nötig, um die Ganggeschwindigkeit der Normaluhr oder die Länge des Normalmaßstabes bei beliebiger Lage festzustellen. — Für das Maßfeld und seine Beziehungen zur Materie nimmt A. Einstein, entsprechend ähnlichen Problemen der Physik, Differentialgleichungen zweiter Ordnung an. Werden die „kosmologischen λ-Glieder" zunächst fortgelassen, welche 1917 eingeführt wurden, und von denen im Schlußparagraphen die Rede sein wird, so gestalten sich die 10 Feldgleichungen so:

(E) $$G_{\mu\nu} + \varepsilon g_{\mu\nu} H = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right);$$

es gelten dabei folgende Bezeichnungen:

$$G_{\mu\nu} = -\underset{\alpha}{S} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \underset{\alpha}{S}\,\underset{\beta}{S}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \underset{\alpha}{S}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha},$$

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\underset{\beta}{S} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right), \qquad H = \underset{\alpha}{S}\,\underset{\beta}{S} g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}.$$

g bezeichnet die Determinante der $g_{\alpha\beta}$; $g^{\alpha\beta}$ ist die zu $g_{\alpha\beta}$ gehörige

Unterdeterminante. ε und $\varkappa$ sind Konstanten, $\varkappa$ kann als Gravitationskonstante gelten. Die $T_{\mu\nu}$ kennzeichnen den Einfluß der Materie; T ist eine durch die $T_{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta}$ bestimmte Größe. — ε entspricht etwa der Konstanten n in meiner Theorie; A. Einstein setzt $\varepsilon = 0$; es wäre wohl von Interesse festzustellen, was diese Spezialisierung für die Theorie bedeutet. —

Charakteristisch für die Einstein'sche Theorie ist die vollständige Symmetrie der 10 Feldgleichungen. Es entspricht dies dem Grundgedanken, daß in dem vierdimensionalen Raum die imaginär gemachte Zeitkoordinate den Raumkoordinaten völlig gleichzustellen sei. *Da nun aber tatsächlich Raum und Zeit sich für die Physik fundamental unterscheiden und dies auch in der Theorie durch den Faktor $\sqrt{(-1)}$ klar zum Ausdruck kommt, liegt für mein Empfinden hier eine zwar in mathematischer Hinsicht interessante, aber durch die Tatsachen durchaus nicht gebotene Hypothese vor.* Wollte man sie fallen lassen, so würden sich unter den Produkten $dx_\mu dx_\nu$ und entsprechend unter den $g_{\mu\nu}$ und den Feldgleichungen vier Gruppen unterscheiden lassen, je nachdem dx_μ und dx_ν sich beide auf den Raum mit gleichen oder verschiedenen Indizes μ, ν, oder auf Raum und Zeit, oder beide auf die Zeit beziehen. Entsprechend haben auch die $T_{\mu\nu}$ verschiedene physikalische Bedeutung. (Es sind die Maxwell'schen normalen und tangentialen Spannungen, die Komponenten des Poynting'schen Energie-Strömungs-Vektors und die Energie.) Die Unterscheidung in den Feldgleichungen würde der Theorie drei weitere Konstanten zur Verfügung stellen. Die Geschwindigkeit der Gravitation ergäbe sich nicht mehr notwendig gleich der Lichtgeschwindigkeit, wie in der jetzigen Theorie. —

Um die Mechanik in die Theorie einzuordnen, ist es noch nötig, die Bahnen sich selbst überlassener materieller Teilchen festzustellen. In der Minkowski'schen Theorie genügt die Bahn eines sich beschleunigungslos bewegenden Teilchens zwischen irgend zwei Raumzeitpunkten der Variationsgleichung $\delta\int ds = 0$, die Bahn stellt also im vierdimensionalen Raum eine „geodätische" oder „geradeste" Linie dar. Diesen Satz übernimmt A. Einstein ohne Änderung für seine allgemeine Theorie. In meiner Arbeit in den Annalen der Physik 1920 zeigte ich, daß der Widerspruch, der zwischen der Theorie und den Beobachtungen über die Rotverschiebung der Spektrallinien auf der Sonne vorzuliegen scheint, eine Umgestaltung dieses Satzes der geodätischen Linie zu verlangen scheint. Ich glaubte damals, daß damit eine grundsätzliche Erweiterung der Einstein'schen Theorie geboten sei; inzwischen habe ich eingesehen, daß auch innerhalb des Rahmens der Ein-

stein'schen Theorie eine Änderung möglich ist. In der Tat, die Verallgemeinerung der für die spezielle Relativitätstheorie geltenden Gleichung $\delta\int ds = 0$ kann beim Übergang zur allgemeinen Theorie offenbar auch so geschehen, daß nun $\delta\int S ds = 0$ gesetzt wird, wobei S ein von den Maßverhältnissen des Raumes bestimmter Skalar ist. *Der Einstein'sche Ansatz $S = 1$ erscheint zwar als die einfachste, aber nicht als eine notwendige Annahme.*

Überblickt man die Einstein'sche Theorie im Ganzen, so stellt sie sich dar als eine möglichst einfache Ausgestaltung des Anscheinsatzes unter der Voraussetzung, daß in dem fingierten vierdimensionalen Raum die Darstellung sich in Bezug auf alle 4 Koordinaten symmetrisch gestalten müsse. — Die Theorien von Lorentz und mir ergeben den Anscheinsatz als Folge der Verkettung von Materie und Äther.

Erweiterungen der Einstein'schen Theorie sind von D. Hilbert und H. Weyl gegeben worden. Leider ist es wegen des beschränkten Raumes nicht möglich, hier darauf einzugehen.

§ 8. Der Relativitätsbegriff in der Physik.

Zu den Umständen, welche die Diskussionen über Relativität und Äther erschwert haben, gehört nicht zuletzt, daß nicht genügend darauf geachtet wurde, in wie sehr verschiedenen Bedeutungen die Worte „relativ" und „Relativität" in der Physik gebraucht werden. Ich will im Folgenden zwei Begriffe der Relativität durch die Bezeichnungen „Körperrelativität" und „Darstellungsrelativität" von einander unterscheiden. — Der Gedanke der Körperrelativität wurde von E. Mach hervorgehoben und gegen die Newton'sche Absoluttheorie von Raum und Zeit ins Feld geführt. Dabei wurde die Vorstellung verworfen, Raum und Zeit seien als etwas für sich Gegebenes in der Welt vorhanden und kämen zur Geltung, wenn man mit Newton sagt, daß sich selbst überlassene Körper sich geradlinig und gleichmäßig bewegen. Der absolute Raum ist nach E. Mach (Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig, 1. Auflage 1883, 7. Auflage 1912) ein „verzweifelter" Gedanke: „Wenn wir daher sagen, daß ein Körper seine Richtung und Geschwindigkeit im Raum behält, so liegt darin nur eine kurze Anweisung auf Beachtung der ganzen Welt."

Nach E. Mach sind die physikalischen Vorgänge bestimmt durch die Beziehungen der Körper in der Welt untereinander. Unvermittelte Fernwirkungen sind für den heutigen Physiker ausgeschlossen, so muß bei der Durchführung dieser Ideen eine Vermittelung angenommmen werden. Eine solche ist in der Wirk-

samkeit des „Inertialfeldes“ zu sehen; wir erfuhren, daß die Materie ihm ebenso wie dem mit ihm enge verknüpften Feld der Lichtschreitungen unterworfen ist. *So darf im Sinne von Mach der Weltuntergrund, der durch das Inertialfeld in Verbindung mit dem Feld der Lichtschreitungen gegeben ist, nicht als „Raum“ und „Zeit“ betrachtet werden. Wir müssen ihn uns vielmehr als etwas Körperliches mit räumlichen und zeitlichen Eigenschaften vorstellen, und es gebührt ihm nach der Sitte der Physik der Name „Äther“.* — Wenn E. Mach schreibt: „Wir müssen sogar dem Gedanken Raum geben, daß die Massen, die wir sehen, und nach welchen wir uns zufällig orientieren, vielleicht gar nicht die eigentlich entscheidenden sind“, so kann nicht zweifelhaft sein, daß wir hier vor allem auch an den Äther zu denken haben.

Etwas wesentlich anderes als die Körperrelativität bedeutet die *Darstellungsrelativität = Standpunktsrelativität.* Derselbe Mann wird von einem viel ärmeren für reich, von einem viel reicheren für arm erklärt. In derselben Gesellschaft schleichen die Minuten dem Einen langsam dahin, während sie dem Anderen eilend entfliehen. Der an die Lichtschreitung geknüpfte Anscheinsatz lehrte uns, daß sich für den Beobachter andere Anschauungen über Körpermasse, Gleichzeitigkeit und Zeitverlauf einstellen, wenn seine Schreitung sich ändert. In alledem zeigt sich die Relativität der „Darstellung“. Wir erkennen: *Die Körperrelativität bezieht sich auf den Zusammenhang der Vorgänge in der Welt, die Darstellungsrelativität auf ihre Beschreibung.* Zwischen beiden Arten der Relativität besteht an sich nicht irgend ein Widerspruch; im Gegenteil, da es sich um dasselbe Erscheinungsgebiet handelt, müssen die Gesetze, welche beide beherrschen, einander bedingen. — Der Unterschied wird durch die verschieden gerichtete Aufmerksamkeit geboten. Bei der Darstellungsrelativität sind die Bezugssysteme, bezüglich die Standpunkte das Wesentliche, welche für die Beschreibung verwertet werden. So hängen die Eindrücke, welche wir Menschen von den Vorgängen erhalten, besonders innig gerade mit den Sätzen der Darstellungsrelativität zusammen. Da es sich für uns hier um Physik handelt, soll das subjektive Element nicht weiter beachtet werden. Wir werden uns das menschliche Empfinden durch die mathematisch-physikalische Behandlungsweise sozusagen „eliminiert“ denken. Wie das möglich ist, erkennt man sofort, wenn man z. B. bedenkt, daß die verschiedenen Eindrücke, welche ein Gebäude von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet auf uns macht, sich in den physikalisch entstehenden Lichtbildaufnahmen weitgehend wiederspiegeln. Nur insofern dieses

geschieht, würde von uns der Unterschied der Erscheinungen beachtet werden.

Seinen Relativitätsprinzipien gibt A. Einstein in der „gemeinverständlichen" Darstellung 1920 folgenden Wortlaut, wobei unter K ein Galilei'sches Koordinatensystem zu verstehen ist. „*Spezielles*" oder „*engeres*" *Relativitätsprinzip*: „Ist K' ein in Bezug auf K gleichförmig und drehungsfrei bewegtes Koordinatensystem, so verläuft das Naturgeschehen in Bezug auf K' nach genau denselben allgemeinen Gesetzen wie in Bezug auf K." „*Allgemeines*" *Relativitätsprinzip*: „Alle Gauß'schen Koordinatensysteme sind für die Formulierung der allgemeinen Naturgesetze prinzipiell gleichwertig."

Es ist klar, daß beide Prinzipien die Relativität der Darstellung behandeln. — Zunächst wollen wir bemerken, daß das allgemeine Relativitätsprinzip in der obigen Formulierung wörtlich genommen eine Selbstverständlichkeit aussagt, denn natürlich kann für die Darstellung des Weltgeschehens jedes beliebige Koordinatensystem benutzt werden. Als E. Kretschmann 1917 (Ann. d. Physik, Bd. 53) darauf hinwies, antwortete A. Einstein 1918 (ebenda, Bd. 55) das Relativitätsprinzip mit *a*) bezeichnend: „Ich halte Hrn. Kretschmanns Argument für richtig, die von ihm vorgeschriebene Neuerung jedoch nicht für empfehlenswert. Wenn es nämlich auch richtig ist, daß man jedes empirische Gesetz in allgemein kovariante Form muß bringen können, so besitzt das Prinzip *a*) doch eine bedeutende heuristische Kraft, die sich am Gravitationsproblem ja schon glänzend bewährt hat und auf folgendem beruht: Von zwei mit der Erfahrung vereinbarten theoretischen Systemen wird dasjenige zu bevorzugen sein, welches vom Standpunkte des absoluten Differentialkalküls das einfachere und durchsichtigere ist. Man bringe einmal die Newton'sche Gravitationsmechanik in die Form von absolut kovarianten Gleichungen (vierdimensional) und man wird sicherlich überzeugt sein, daß das Prinzip diese Theorie zwar nicht theoretisch, aber praktisch ausschließt." — *In der Relativitätstheorie spielt hiernach wesentlich mit der Gesichtspunkt, ein Anzeichen der Richtigkeit sei in der Einfachheit der Darstellung zu suchen.* Was einfach erscheint, hängt nun aber von den Mitteln der Darstellung ab; schreibt man diese vor und verlangt dann Einfachheit der Form, so heißt das, daß Hypothesen gemacht werden. *So müssen wir auch nach den der Einstein'schen Theorie zugrunde liegenden Hypothesen fragen, um die Bedeutung ihrer Relativitätsprinzipien zu erkennen.* Die Antwort ist im vorigen Paragraphen gegeben worden: *Bei der tatsächlichen Ausarbeitung der Theorie stehen der allgemeinen Formulierung ihrer Grundprinzipien*

spezielle Vorschriften über die Anwendung gegenüber. Leitend ist die Vorstellung des vierdimensionalen Raumes mit seinen durch das Minkowski'sche reell-imaginäre Längenelement gegebenen Maßbeziehungen. So werden der Gegensatz von Materie und Maßfeld und das System der Lichtschreitungen — dieses durch die Grenze zwischen reeller und imginärer Länge — von vornherein angenommen, und dient der an die Lichtschreitungen geschlossene erweiterte Anscheinsatz als fundamentale Hypothese. Dazu kommen die Hypothese der Symmetrie der Feldgleichungen in allen 4 Koordinaten des vierdimensionalen Raumes und die Hypothese der geodätischen Linie im vierdimensionalen Raum als Bahn frei sich bewegender materieller Körper.

Charakteristisch für die Einstein'sche Verwertung des Relativitätsgedankens ist immer, daß gewisse Koordinatensysteme für die Beschreibung der Weltvorgänge als gleichwertig angesehen werden. Damit ist ohne Frage eine wertvolle Erweiterung der Lorentz'schen Theorie gegeben. Man darf aber nicht übersehen, daß man mit der Grundvorstellung der Körperrelativität in Widerspruch gerät, sobald man annimmt, die Gleichwertigkeit sei in jeder möglichen physikalischen Hinsicht vorhanden. Für die Welt im Ganzen bedeutet jedes andere Koordinatensystem einen anderen Standpunkt der Beurteilung. *Gerade wenn wir relativistisch denken, werden wir daher zu folgendem Schluß geführt: Da die Koordinatensysteme der Physik sich stets nur auf einen beschränkten Bereich der Erscheinungen beziehen, stellt jedes andere System einen anderen physikalischen Standpunkt vor. Es ist darum prinzipiell kein Koordinatensystem einem anderen als gleichwertig zu erachten.* — Erkenntnistheoretisch hängt hiermit das wesentlichste Ergebnis der Theorie zusammen, welches wir gewonnen haben, nämlich die Erkenntnis, daß mit Änderungen des Bewegungszustandes und des Ortes im Gravitationsfelde Wandlungen der physikalischen Verhältnisse — der Körperformen, der Körperträgheit, der Ablaufsgeschwindigkeit der Vorgänge — verbunden sind, welche der Beobachtung entgehen, wenn der Beobachter selbst jene Änderungen mitmacht und so jenen Wandlungen ebenso wie seine Umwelt unterworfen ist. *Es folgt auch, daß den Einstein'schen Prinzipien nur eine formale Bedeutung beizumessen ist: sie sind als hypothetische Aussagen über die Wirkung der Körperrelativität anzusehen. Damit stimmt vortrefflich zusammen, daß die Einsteinschen Prinzipien auch formal nicht unbeschränkt gelten*: Es dürfen sowohl für das spezielle wie das allgemeine Relativitätsprinzip nur solche Koordinatensysteme zugelassen werden, welche dem Gebiet der Unterlicht-

schreitungen angehören. Andernfalls würde ja Ruhe im Koordinatensystem für diese Systeme zu einem unerlaubten Zustand der Körper werden. Die beschränkte Gültigkeit der Prinzipien gehört zu jenen Besonderheiten der Relativitätstheorie, die immer wieder übersehen werden. Und doch ist sie von fundamentaler Wichtigkeit. In ihr zeigt sich die Wirkung der Köperrelativität: Verfolgt man ihre physikalische Bedeutung, so gelangt man bei Benutzung des Gedankens der Körperrelativität zur Äthervorstellung. — *Um der Beschränkung willen ist es selbst für die Relativitätstheorie durchaus falsch, wenn kurzweg gesagt wird, „Gleichzeitigkeit“, „früher“ und „später“ seien zu relativen Begriffen geworden.* Die Unbestimmtheit der Gleichzeitigkeit, welche der Anscheinsatz für die Einstein'sche Relativitätstheorie formal übrig läßt, gilt nur in engem Bereich: auf je 150 Kilometer Abstand bleiben nur 1/1000 Sekunde unbestimmt. Darüber hinaus besteht über „früher“ und „später“ kein Zweifel. — Nach § 6 ist die Unbestímmtheit menschlicher Unvollkommenheit zuzuschreiben, welche die Einzelheiten der Lichtausbreitung nicht aufzufassen erlaubt. Ob etwa in einer höheren Ordnung der Schärfe doch vielleicht eine Unbestimmtheit der Gleichzeitigkeit auch in den Naturvorgängen selbst bliebe, ist eine Frage, die noch unbeantwortet bleiben muß. Ständen uns schnellere Boten als das Licht zur Verfügung, so könnte eine Verschärfung vorgenommen werden. Vielleicht bietet die Gravitation einmal die Mittel dazu. Die Annahme der Einstein'schen Relativitätstheorie, die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation sei gleich der des Lichtes, ist rein hypothetisch, denn sie ist die Folge der Hypothese der Symmetrie der Feldgleichungen im vierdimensionalen Raum. — Aber auch dann, wenn es in der Welt schnellere Boten als das Licht nicht gäbe, könnten wir doch eine Verschärfung der Beurteilung der Gleichzeitigkeit erhoffen, wenn es gelänge, weitere physikalische Einzelheiten über die Ausbreitung des Lichtes oder der Gravitation zu entdecken.

Da A. Einstein den Weltuntergrund mit seinen Maßeigenschaften als „Raum“ darstellt, führt seine Theorie in scharfem Gegensatz zu E. Mach zur Newton'schen Raumvorstellung zurück. Es ändert sich nur die Form, indem Raum und Zeit zu einer einheitlichen Mannigfaltigkeit fest verbunden werden, und diese von Stelle zu Stelle wechselnde Eigenschaften erhält. Das Charakteristische der Newton'schen Auffassung finden wir trotzdem wieder: Gerade so wie die sich selbst überlassenen materiellen Körper bei Newton in Raum und Zeit, so finden sie bei A. Einstein in dem vierdimensionalen Raum ihren Weg gemäß dessen Struktur. Dieser

eigenartige Standpunkt war schon in der speziellen Relativitätstheorie angedeutet, indem durch das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im „leeren“ Raum eine von der Materie unabhängige Bestimmtheit der Lichtschreitungen und in Anlehnung daran eine Bestimmtheit des Inertialfeldes angenommen wurden. So ist es wohl verständlich, daß E. Mach 1912 in seiner „Mechanik“ unter den „Relativisten“ A. Einstein nicht mitaufführen konnte. Vom Mach'schen Standpunkt der Körperrelativität betrachtet, erschien die erste Einstein'sche Theorie trotz ihres Namens als Absoluttheorie. Andererseits stellt sich gerade die von A. Einstein zurückgewiesene Lorentz'sche Äthertheorie als eine echte Relativitätstheorie dar. — Auch die neuere Einstein'sche Theorie kann als Relativitätstheorie im Sinne Machs nicht gelten, wenn sie den Weltuntergrund als unkörperliches Raumzeitgebilde auffaßt. Durch die im folgenden Paragraphen zu erwähnenden λ-Glieder unternimmt A. Einstein, die Theorie wenigstens indirekt dem Machschen Gedanken anzupassen, indem der Weltuntergrund und die Materie durch eine besondere Hypothese („*Mach'sches Prinzip*“) fest miteinander verbunden werden. — Läßt man sich von vornherein durch den Gedanken der Körperrelativität leiten, so darf man nicht dem Raum und der Zeit oder einer Verbindung beider körperliche Wirkungen zuschreiben, sondern muß im Weltuntergrund etwas Körperliches als wirkend annehmen. Dann wandelt sich die Einstein'sche Theorie in eine Äthertheorie um.

Wie die vorstehenden Auseinandersetzungen zeigen, ist der Weg weit, der von den Einsteinschen Grundgedanken der Darstellungsrelativität zu der definitiven Theorie führt; eine ganze Reihe von Hypothesen wird zu Hilfe genommen, deren physikalischer Charakter schwer erkennbar ist. Da kann es nicht auffallen, daß die Theorie von Freund und Feind so vielfach mißverstanden wurde. Besonders oft hat das Schlagwort „Relativität“ zu Irrtümern Anlaß gegeben.

Nach dem Plan der vorliegenden Arbeit sollte sich hier ein Paragraph anschließen, der von den „populären“ Auffassungen der Relativitätsprinzipien handelte. Er muß ausfallen, da für die Arbeit nicht genügend Platz zur Verfügung steht. Einiges ist oben schon eingeflochten worden. Ich beschränke mich hier auf eine Anmerkung, welche die Einleitung für den ausgefallenen Paragraphen bilden sollte. — Bei der Entwicklung der Einsteinschen Theorie der Darstellungsrelativität spielte das „Äquivalenzprinzip“ eine wichtige Rolle. Was es aussagt, wird am einfachsten klargestellt durch das Einstein'sche „Beispiel der Be-

obachtungszellen". Man denke sich zwei gleiche solche Zellen mit Beobachtern im Innern. Die eine hänge in Ruhe im Schwerefeld der Erde, die andere befinde sich im Weltenraum zwischen den Fixsternen in einem Gebiet, wo das Maßfeld nahezu homogen ist. Diese Zelle werde mittels eines Seiles durch irgend welche Kräfte, welche das Seil spannen, die Zelle aber sonst nicht merklich beeinflussen, beschleunigt so bewegt, daß für die Beobachter in der Zelle dauernd der Eindruck des Schwerefeldes auf der Erde entsteht (10 m sek²). Das Äquivalenzprinzip sagt dann aus, das Feld in der beschleunigten Zelle und dasjenige in der Zelle an der Erdoberfläche seien nicht nur für den Anschein, sondern in ihrem „Wesen" gleich. Die Resultate des § 6 führen zu der gegensätzlichen Folgerung, daß die beiden Fälle physikalisch, vom Standpunkt der Körperrelativität betrachtet, keineswegs als „wesensgleich" gelten können. Die Geschwindigkeit der beschleunigten Zelle relativ zur Sternenwelt wächst in ca. 1/2 Jahr auf 1/2 der Lichtgeschwindigkeit, und es nähert sich dann die Schreitung der Zelle den Lichtschreitungen ohne Grenzen an. Wie wir in § 6 erfahren haben, wandelt sich dabei der physikalische Zustand in der Zelle dauernd. Die Körper flachen sich ab, die Vorgänge werden träger; im Gegensatz dazu ist der Zustand in der Beobachtungszelle auf der Erde stationär. So scheint es mir geboten, die Angelegenheit von einer anderen Seite zu betrachten, um ein deutliches Bild von ihrem physikalischen Sinn zu erhalten. *Wir haben es bei dem Äquivalenzprinzip offenbar mit der physikalischen „Abbildung" zu tun, die vielfach angewandt wird.* Ich selbst verwertete sie in meiner Arbeit von 1911. Dabei wird ein physikalischer Vorgang unter Benutzung eines passend gewählten Koordinatensystems beschrieben; man gibt dann den in Betracht kommenden Größen andere Bedeutung und erhält durch dieselbe Beschreibung nun einen anderen physikalischen Vorgang. Dieser und der erste Vorgang sind dann aufeinander „abgebildet". *Die gleiche Beschreibung macht aber in solchen Fällen die Vorgänge nicht physikalisch gleich.* Wie das Äquivalenzprinzip, so kann man auch die Relativitätsprinzipien Einsteins als Sätze physikalischer Abbildung betrachten.

§ 9. **Äther und Materie.**

Die Frage nach den Beziehungen zwischen Äther und Materie habe ich in früheren Arbeiten schon mehrfach behandelt. Insbesondere sei auf die Veröffentlichungen von 1920 in den Astronomischen Nachrichten, Bd. 211, und in den Annalen der Physik, Bd. 63, hingewiesen. Im Folgenden gebe ich eine Weiterführung.

Wir sehen in der Welt eine Fülle von scheinbar selbständigen Körpern, die Physik aber lehrt, daß die Selbständigkeit eine Täuschung ist, bewirkt durch die Unvollkommenheit unserer Sinne. Alles in der Welt ist mit Allem verkettet. Es erscheint in hohem Grade merkwürdig und mag zur Demut stimmen, daß wir erkennen müssen, wie die Sinne uns so gar nichts zeigen von der Wirksamkeit der verbindenden Kräfte, von der Schwerkraft, den elektrischen und magnetischen Kräften und von den Kräften, welche den Zusammenhalt der Atome zu festen Körpern bedingen. Die Physik hat diese Kräfte in mühsamer Arbeit erst aufsuchen müssen, und es ist ihr dabei nur gelungen, uns mit einigen wenigen äußerlichen Zügen der Vorgänge bekannt zu machen. Davon ist im Vorstehenden die Rede gewesen. Als wichtigste Erkenntnis ergab sich, daß ein der direkten Sinneswahrnehmung sich entziehender Weltuntergrund, der „Äther" im Sprachgebrauch der Physik, überall vorhanden ist, welcher die Verbindungen zwischen den molekular-materiellen Körpern gewährleistet. Nach einer seltsamen Schicksalsfügung hat gerade die Einstein'sche Relativitätstheorie, welche den Weltuntergrund seiner Körperlichkeit berauben wollte, zu der Einsicht geführt, daß die uns gewaltig scheinende Wirkung der Schwerkraft, welche die Planeten an die Sonne, uns selbst an die Erde fesselt, schon durch äußerst geringe Unterschiede in der Beschaffenheit des Weltuntergrundes veranlaßt wird. Man beachte, um dieses einzusehen, daß die Lichtgeschwindigkeit ein Maß für diese Beschaffenheit bildet. Die Schwerkraft auf der Erde nun wird bewirkt, weil hier nach oben hin auf 1 Meter Erhebung die Lichtgeschwindigkeit um 1 bis 2×10^{-16} ihres Betrages zunimmt. (Vergl. meine Arbeit in d. Ann. d. Physik 1920). Andererseits hat die molekulare Materie nur einen äußerst geringen Einfluß auf die Beschaffenheit des Weltuntergrundes. Selbst die große Massenanhäufung der Sonne vermag die Lichtgeschwindigkeit an ihrer Oberfläche nur um ca. 1/500 000 Teil gegenüber dem Betrag zu ändern, der in weiten Fernen besteht. *So erscheint der Äther der molekularen Materie gegenüber als übermächtig.* Dieser Eindruck, so sehr er der naiven Beobachtung widerspricht, verstärkt sich um so mehr, je mehr die physikalischen Einzelheiten beachtet werden. Man ist gewohnt, Trägheit und Undurchdringlichkeit als diejenigen Eigenschaften zu betrachten, welche der Materie recht eigentlich ihre Körperlichkeit geben. Aber die Elektrodynamik lehrte die Ursache der Trägheit im Weltuntergrund zu sehen, mit dem die Materie verkettet ist. Die Entdeckung der Radioaktivität hat Mittel geboten, festzustellen,

daß die Materie keineswegs undurchdringlich ist. Bei genügend hohen Geschwindigkeiten vermag ein Atom mitten durch viele Tausende anderer Atome hindurchzugehen. So kann denn dem heutigen Physiker die Erfahrung nicht mehr auffällig sein, daß die Materie durch den Äther hinweg geht, ohne ihm merklich ihre Bewegung aufzuzwingen. Auch hierin zeigt sich ihm eben nur die Geringfügigkeit des Einflusses der Materie. Ein weiteres Anzeichen hierfür ergibt sich, wenn man beachtet, daß nach den Erfahrungen der Astronomie und der Geophysik selbst so große Mäntel von Materie, wie sie durch Erde und Sonne geboten werden, jene als Gravitation bezeichnete und vom Weltuntergrund übermittelte Wechselwirkung zweier Teilchen, von denen das eine im Innern der Erde, das andere im Innern der Sonne liegt, nicht merklich zu beeinflussen vermögen. Zu allem diesen kommt nun noch, was der Anscheinsatz für die Bewegung uns vor Augen führt, und gerade hier finden wir vielleicht das am meisten Überraschende im ganzen Erscheinungskreis. Wir erfahren, daß die Materie gebunden ist, das durch den Äther vorgeschriebene Gebiet der Unterlichtschreitungen nicht zu verlassen, daß ihre Gestalten sich abflachen, die Vorgänge in ihr immer träger verlaufen, je näher ihre Schreitung den durch die Lichtschreitungen des Äthers gebotenen Grenzen sich annähert. *So scheint denn die molekulare Materie mit ihrem ganzen physikalischen Sein der Herrschaft des Äthers unterworfen, während sie sich dennoch ihrerseits mit einem äußerst geringen Einfluß begnügen muß. Der Äther erscheint als Träger aller Kräfte in der Welt und als das, was dieser die Körperlichkeit gibt.* Wenn unsere Sinnesorgane uns trotzdem nur die molekulare Materie und nicht den Äther direkt zeigen, so liegt das wohl ganz einfach daran, daß wir selbst aus molekularer Materie bestehen, und die Sinnesorgane daher für die Beobachtung dieser Materie gebaut sind.

Das Licht vermag Entfernungen von vielen Zehntausenden von Lichtjahren im Weltenraum ohne merkliche Umwandlung zu durchlaufen, daher muß geschlossen werden, daß die Struktur des Äthers sehr viel feiner ist, als die der molekularen Materie. Dasselbe folgt aus den neueren spektralanalytischen Untersuchungen über den Atombau, welche zu zeigen scheinen, daß der Äther selbst in Gebieten, die äußerst klein gegenüber den Dimensionen eines materiellen Atomes sind, noch nicht merklich andere Eigenschaften besitzt, als in makroskopischen Bereichen. — Bei den innigen Beziehungen, die zwischen Materie und Äther bestehen, scheint es unnatürlich, sie als einander Fremdes hinzustellen.

Man wird wohl annehmen dürfen, daß sie in ihrem Wesen zusammengehören. *Am wahrscheinlichsten ist, was bedeutende Physiker oft schon ausgesprochen haben, daß die Atome der molekularen Materie Stellen ausgezeichneter Beschaffenheit des Äthers sind.* — Höchst seltsam ist mir immer erschienen, daß manche Autoren es so darstellen, als habe der negative Erfolg des Michelson'schen Versuches zu einem „Bankerott" der Ätherphysik geführt, als sei die Hypothese der Lorentz-Deformation nur ein Versuch, dies zu bemänteln. Sobald man den Mach'schen Gedanken der Körperrelativität fest ins Auge faßt (und noch mehr, wenn man den Äther zuhilfe nimmt, ihn mit der Materie verkettend, wie es die Physik verlangt), ist ein Einfluß der Bewegungsänderung der Körper auf ihre Gestalt und auf den Ablauf der Vorgänge in ihnen etwas so durchaus Selbstverständliches, daß es Aufgabe der Physik gewesen wäre, ihn aufzusuchen, wenn nicht die Theorie von Lorentz beizeiten den Weg gewiesen und das Verhalten der Elektronen ihn kennen gelehrt hätte.

Einen Maßstab für die Tätigkeit der Materie sehen wir in der Physik unter dem Bilde der „Energie". Die Elektrodynamik zeigt deutlich, wie diese an dem Aufbau der Materie im Äther beteiligt ist. Wenn wir also die Atome der Materie als Gebilde im Äther ansehen, so werden wir auch dem Äther einen Energieinhalt zuschreiben müssen. Da nun der Äther, wie schon erwähnt wurde, auch innerhalb der Materie die Eigenschaften beizubehalten scheint, die er sonst zeigt, muß angenommen werden, daß jene Energie, die wir in der Materie, z. B. bei den Elektronen, antreffen und die besonders geordnete Ätherenergie darstellt, von gleicher Größenordnung oder kleiner ist wie die dem Äther im allgemeinen innewohnenden Energie. So folgt im Hinblick auf den Bau der Elektronen, daß die Energiedichte im Äther mindestens vergleichbar mit $7 . 10^{30}$ erg/cm³ zu schätzen ist. Nach der Elektrodynamik hängt die Trägheit der Materie mit ihrem Energieinhalt zusammen, die Relativitätstheorie nimmt an, es sei $m = E/c^2$, wenn m die träge Masse, E die Energie, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Setzen wir diese Beziehungen auch für den Äther als gültig voraus, so würde die Massendichte des Äthers vergleichbar mit 10^{10} der Dichte des Wassers oder größer zu schätzen sein. (Vergl. meine Arbeit in d. Astronom. Nachr. Bd. 211, 1920). Von den Kräften, die im Äther herrschen, erhält man einen Begriff, wenn man bedenkt, daß der Druck, welcher bei dem Zusammenhalt der elektrischen Ladung im Elektron ins Spiel kommt von der Größenordnung $7 . 10^{24}$ Atmosphären ist. Um zu erklären, daß jedes Stäubchen von Materie im

Äthermeer seine Eigenart zu bewahren vermag, muß angenommen werden, daß in den Atomen, insbesondere in den positiv und negativ geladenen Kernen und Elektronen, welche nach den neueren Ergebnissen der Physik als die wesentlichen Bestandteile der Atome erscheinen, die Besonderheit der Materie zwar nur in kleinem Bereich, aber hier stark genug zur Geltung kommt, um sich gegenüber der Ätherumgebung Geltung zu verschaffen. In erster Linie möchte ich dabei die in meiner Arbeit in den Annalen der Physik ausgesprochene Ansicht hervorheben, nach welcher die Atome gewisse Höhepunkte in der Struktur des Äthers bedeuten.

Innerhalb der Materie bemerken wir einen dauernden Austausch der Energie von Teilchen zu Teilchen, sollte ein ähnlicher Austausch nicht auch zwischen Materie und Äther stattfinden? Es scheint mir, daß sich wirklich zwei Anzeichen dafür auffinden lassen. Zunächst im Verhalten der radioaktiven Körper. Die physikalische Ursache für das allmähliche Zerspringen der Atome solcher Körper ist uns nicht bekannt, alle uns vertrauten physikalischen Einwirkungen haben sich als einflußlos erwiesen. Da scheint es mir sehr wohl möglich, daß ein dem Zufall unterworfener Austausch der Energie mit dem Äther die Zerstörung der Atome bewirkt. –– Ein weiteres Anzeichen glaube ich in der innern Wärme der Himmelskörper zu erkennen. Die bekannten Wärmequellen genügen kaum, um die Wärme, welche die Sonne jetzt aussendet, für einen Zeitraum von 20 Millionen Jahre zu decken, und doch ist aus der Erdgeschichte zu schließen, daß die Sonne schon sehr viel länger besteht. Es ist mir im hohen Grade wahrscheinlich, daß hier eine Überführung von Ätherenergie auf die Materie im Spiel ist. Erde und Sonne geben auf 1 Gramm ihrer Masse im Jahr ca. 4.10^{-8}, bezüglich 1,6 Gramm-Kalorien ab. So folgt, daß der angenommene Übergang der Energie nicht einfach der Masse proportional sein kann. Es muß angenommen werden, daß der Übergang mit der Temperatur wächst, sei es stetig gemäß einer Potenz der Temperatur, sei es sprungweise, entsprechend den Umwandlungen der Materie. Vielleicht kommt die Quantentheorie zur Geltung. Das Verhältnis der Wärmeabgabe von Erde und Sonne würde recht gut wiedergegeben werden, wenn man den Austausch proportional mit dem Quadrat der absoluten Temperatur ansetzte. Für die Temperatur der Gestirne kommt außer der Abhängigkeit des Überganges von der Temperatur auch die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Temperatur in Betracht. Wir wissen nicht, welche Gesetze bei sehr hohen Temperaturen gelten mögen, wo Wärmestrahlung und Strahlungsdruck mitwirken, instabile

Zustände scheinen möglich. Gedenkt man der Forschungsergebnisse der Physik der Gestirne über die merkwürdige Ordnung der Sterne in eine Reihe mit wachsender Größe von „Zwergen“ zu „Riesen“ („Kultur der Gegenwart“, bei Teubner, Band Astronomie), so drängt sich der Gedanke eines Kreislaufes der Materie auf, welcher, wie mir scheint, manches Rätsel in dem Werden und Vergehen der Gestirne und der Atome der Materie beseitigt. Im Weltenraum müssen wir uns Reste früherer Weltkörper in Form von kleineren oder größeren Meteoriten denken. Sie lagern sich allmählich zu neuen Gestirnen zusammen und bewirken, daß deren Masse wächst. Wegen der Überführung der Energie aus dem Äther wächst damit zugleich die Temperatur. Schließlich werden instabile Zustände erreicht, und eine Katastrophe zerstört den Weltkörper, seine Materie zerstreuend. Das Spiel kann nun von Neuem beginnen. Dieser Kreislauf ist wohl auch für die Materie selbst wesentlich. Während der Perioden der hohen Temperatur und des hohen Druckes im Innern der großen Anhäufungen der Materie gehen höchst wahrscheinlich Umwandlungen der Atome vor sich. Hier werden wohl z. B. die radioaktiven Atome gebildet, welche in den darauffolgenden Perioden tiefer Temperatur allmählich wieder zerfallen. Nimmt man einen solchen Kreislauf der Materie an, so wird die letzte Schwierigkeit beseitigt, welche der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie einstmals brachte, indem er die Welt mit dem „Wärmetod“ bedrohte. Als man in dem zweiten Hauptsatz dann einen Wahrscheinlichkeitssatz erkannte, schienen Neuschöpfungen möglich. In dem geschilderten Kreislauf der Materie sehen wir sie am Werk. —

Dem Äther wird bei solcher Ansicht die Rolle eines allgemeinen Vorrates an physikalischem Leben zugeschrieben. Von ihm kommt es und zu ihm kehrt es wieder zurück. Denken wird nun an unseren eigenen Körper, der für unsere Sinne aus molekularer Materie gebaut erscheint. Die Atome dieser Materie bilden unsere Sinnesorgane und selbst jenes Organ, das Gehirn, dem unser Denken zugeordnet ist. Aber unser Bewußtsein ist keineswegs in Atome zerteilt. Wir schauen *einheitliche* Bilder, fassen stets Empfindungsreihen und Gedankenreihen zusammen. Was gibt hierbei die Verbindung zwischen den Atomen? Offenbar müssen wir hier dem Äther gerade so wie bei den physikalischen Kräften eine vermittelnde Rolle zuschreiben. *Auch für unser geistiges Leben also bietet der Weltuntergrund, der Äther, die Grundlage.* Wenn wir so den Geist mit dem Äther verknüpfen, ist das um nichts merkwürdiger als die Ver-

knüpfung unseres Lebens mit der unseren Sinnen tot scheinenden Materie. *Wir müssen uns frei machen von jenem Materialismus, welcher in der Welt nur anerkennen will, was die Sinne uns zeigen. Hinter der Welt, die wir schauen, liegt eine andere Welt, deren Wirkung wir wohl empfinden, für deren Erkenntnis wir aber nur sehr unvollkommen ausgerüstet sind.* Der Mensch ist nicht „allschauend" und wird nicht „allwissend" werden. —

Wurden wir so zu Gedanken über die Welt im Ganzen geführt, so möge es auch erlaubt sein, der Grenzen der Welt zu gedenken. — Im Anschluß an Untersuchungen über Euklidsche und Nicht-Euklidsche Geometrie wurde die Frage öfters diskutiert, ob die Welt endlich, oder unendlich sei; das Newtonsche Gesetz gab Anlaß zu der Frage, ob die Menge der Materie in der Welt unendlich groß, oder endlich zu denken sei. Ähnliche Erwägungen macht A. Einstein für seine Theorie. Die Gleichungen (E) auf S. 55 zeigen die Materie als gewissermaßen zufällig vorhandene fremde Bestandteile im Äther. Statt dessen sucht A. Einstein unter dem Namen des „Machschen Prinzipes" einer Hypothese für seine Theorie Geltung zu verschaffen, welche den Zustand des Weltuntergrundes vollständig mit der Materie verknüpft. Dazu werden links in den Gleichungen (E) Glieder $-\lambda g_{\mu\nu}$ hinzugefügt, wobei λ eine gewisse Weltkonstante darstellt. Die λ-Glieder sollen die Materie in ähnlicher Weise kompensieren, wie es in Theorien früherer Autoren durch die Annahme negativer gravitierender Masse geschah. A. Einstein setzt dabei voraus, daß die Materie zwar unregelmäßig in der Welt verteilt sei, aber doch gleichmäßig, wenn man große Gebiete betrachtet. — Nach meinem Empfinden wird durch die λ-Glieder nicht der Äther der Materie, sondern umgekehrt die Materie dem Äther untergeordnet, denn nun erscheint die Materie als Ausscheidungen des Äthers, die hier und da zusammengeballt sind und dabei geringfügige Änderungen in der Beschaffenheit des Äthers bewirken. — An die λ-Glieder knüpft A. Einstein weiter die Vorstellung eines endlichen Raumes mit endlichem Inhalt an Materie, wobei die Größe des Raumes durch λ bestimmt wird. Ich scheue mich, solchen Spekulationen zu folgen, so reizvoll sie auch scheinen. Gerade so wie für mein Gefühl in der Richtung auf das Kleine die Beschaffenheit der Materie durch die 10 Komponenten $T_{\mu\nu}$ und die Beschaffenheit des Äthers durch die 10 Komponenten $g_{\mu\nu}$ nicht erschöpft wird, möchte ich auch in der Richtung auf das Große noch nicht Halt machen bei so einfachen Formen, wie sie die Gleichungen (E) darbieten. Wohl ist die Welt für unsere heutige Anschauung größer

geworden, als sie einst erschien, wo man sie durch die Sphäre der Fixsterne begrenzte, aber schwerlich gibt die heutige Astronomie uns schon einen Überblick über die gesamte Welt. Viel wahrscheinlicher ist mir die Vorstellung, daß wir in einer Ätherinsel wohnen, die mit ihren Sterngebilden nichts weiter ist, als ein einzelner Teil einer viel größeren Welt.

Zusammenfassung.

Entgegen dem Sinnenschein sind die molekular-materiellen Körper nicht selbständige Gebilde. Die Atome kennzeichnen Besonderheiten in einem Weltuntergrund, dem Äther. Darin liegt ihre Bedeutung, das begründet aber auch ihre Abhängigkeit. Unabwendbar ergibt sich der Schluß, daß die molekulare Materie nicht die Grundlage für den Bau der Welt ist. Vielleicht aber dürfen wir in den Atomen Höhepunkte für das Weltgeschehen erblicken. — Daß unsere Sinne uns wohl die molekulare Materie, nicht aber den Äther zeigen, erklärt sich durch die Organisation unseres Körpers, der selbst aus molekularer Materie besteht.

Untersuchungen über experimentelle Hypnose bei Insekten und ihre Beziehungen zum Berührungsreiz.

1. Mitteilung.

Von

R. W. Hoffmann.

Vorgelegt von Herrn Ehlers in der Sitzung vom 25. Februar 1921.

Bei Untersuchungen über die Orientierung niederer Insekten im Raum, die zum großen Teil abgeschlossen vorliegen, stieß ich auf das Problem der tierischen Hypnose, das mich seit 1914, allerdings mit größeren Unterbrechungen durch Krankheit und Reisen, in wachsendem Maße beschäftigt hat. Wie Mangold in seiner vorzüglichen Monographie und späteren Arbeiten[1]) gezeigt hat, kann die tierische Hypnose in sehr verschiedenen Formen auftreten. Stets lassen sich jedoch für sie eine Anzahl übereinstimmender Kriterien finden, die sie in hinreichender Weise kennzeichnen. Das hervorragendste Symptom der tierischen Hypnose ist, wie schon Mangold betont, die plötzliche Einstellung der spontanen Bewegungen (Akinese) unter bestimmten physiologischen Einwirkungen. In Zusammenhang hiermit können sehr charakteristische Begleiterscheinungen, wie Hypotonie und Katalepsie in allen Abstufungen, Veränderungen des Muskeltonus und der Reflexerregbarkeit, und zwar in wechselndem Grad innerhalb derselben Hypnose, endlich Anästhesie und Analgesie auftreten.

Unter den Wirbellosen sind es nun vor allem die Arthropoden, bei denen die tierische Hypnose, allerdings meist nur in gelegentlichen Beobachtungen, studiert worden ist. Sie tritt hier in zwei Formen auf: als experimentell erzeugte Hypnose und als das sogen. Sich-Totstellen (Thanatose (Mangold)). Obgleich sich beide keineswegs in ihren Erscheinungskomplexen decken, so ist es doch nicht leicht, sie von einander abzugrenzen, da auch

1) Ich erwähne nur: Mangold, E., Hypnose und Katalepsie bei Tieren im Vergleich zur menschlichen. Jena, G. Fischer, 1914. — Derselbe, Die tierische Hypnose. Ergebnisse der Physiologie 18. Jahrgg. 1920.

das viel angezogene biologische Moment des Nutzens, das im Gegensatz zur Hypnose die Thanatose auszeichnen soll, zum mindesten in manchen Fällen zu versagen scheint[1]). (Siehe Fabre, das Beispiel der beiden Scarites in „Souvenirs Entomologiques", 7. Serie.)

Das charakteristischste Unterscheidungsmerkmal der Thanatose gegenüber der Hypnose scheint mir in der Leichtigkeit zu liegen, mit der das Tier auf adäquate Reize hin in Akinese versetzt wird.

Da jede Thanatose unter dem Gesichtswinkel einer Anpassungserscheinung betrachtet werden kann, so dürfte es zweifellos von Interesse sein, die Hypnose dort zu studieren, wo sie normaler Weise nicht vorkommt und deshalb ursprünglichen Charakter bewahrt haben muß.

Bisher war experimentelle Hypnose bei Insekten noch nicht bekannt. Als es mir gelungen war, sie festzustellen, suchte ich sie bei wenigen Typen sehr verschiedener Gruppen eingehend zu studieren[2]). Als Hauptaufgabe stellte ich mir, zu untersuchen:

1. Welche äußeren Momente die Hypnose auslösen.
2. Welche Momente sie beeinflussen.
3. Ob die Hypnose eine isoliert auftretende Erscheinung ist, oder ob sie Beziehungen zu andern physiologischen und biologischen Zuständen hat.

Zahlreiche Versuchsserien wurden zur Beantwortung dieser Fragen angestellt. Hierzu wurden 3 Insektentypen verwandt:

1. Tomocerus plumbeus L (Collembole).
2. Blatta orientalis L (Orthopter).
3. Limnotrechus lacustris L (Rhynchote).

Auf den nachfolgenden Blättern sollen kurz die Hauptresultate meiner Studien mitgeteilt werden. Eine ausführliche Darstellung, unter näherem Eingehen auf theoretische Fragen mit Photogrammen,

---

1) Nur gar zu leicht sind wir übrigens geneigt, für eine auffallende Erscheinung im Verhalten eines Tieres, die sich nicht weiter erklären läßt, einen biologischen Vorteil für dasselbe anzunehmen und doch gibt es zweifellos zahlreiche hervorstechende tierische Eigenschaften, die für ihre Träger gleichgültig oder gar schädlich sind.

2) Wie ich erst jetzt sehe, hat doch ein Forscher (Szymansky, J. S. Pflügers Arch. Bd. 166, 1917) eine kleine Mitteilung über experimentelle Hypnose bei der Küchenschabe gemacht. Meine Ergebnisse gehen jedoch bis zum Jahre 1915 zurück. In einer andern Arbeit „Ueber Umdrehreflexe bei Käfern" — ebenda, Bd. 171, 1918 — erwähnt er, daß gewisse Käfer nach mehrfacher gewaltsamer Umkehr in Hypnose geraten können.

größeren Serienreihen und graphischen Darstellungen bleiben einer späteren Arbeit vorbehalten.

Accidentelle Hypnose.

Auch in jenen Fällen, wo Thanatose nicht vorkommt, kann gelegentlich in freier Natur durch zufälligen mechanischen Insult Hypnose erzeugt werden. Ich will sie als accidentelle Hypnose bezeichnen. Manche der Fälle sind von besonderem Interesse, da sie ein gewisses Licht auf die Art der Hervorrufung und auf die Wirkungsweise des Reizes werfen.

Ich gebe einige Beispiele:

Tomocerus.

1. Ein Tier erreicht nach starkem Sprung ein Blatt, fällt jedoch auf die Seite und bleibt für 906″ bewegungslos, dann erwacht es langsam und läuft weiter.

2. Ein Tier kommt beim Laufen über ein Wachstuch, das über einen Abhang ausgebreitet ist, zum Straucheln, rutscht eine Strecke abwärts und bleibt dann 312″ auf der Seite liegen — sodann Erwachen, Wandern zum Rand des Tuchs und Sprung in die Tiefe.

Auch ein einfaches Ausgleiten und auf die Seitefallen beim Gehen kann gelegentlich zur Hypnose führen. Dies ist z. B. manchmal bei ganz jungen Individuen zu sehen, bei welchen das lange Geißelglied der Antenne, das beim Straucheln als Stütze dient, noch nicht zur Ausbildung gekommen ist.

Solche accidentelle Hypnosen sah ich z. B. sich beim Wandern über Spiegelscheiben ereignen. Ich erwähne, daß ich Hypnose auch bei Tieren auftreten sah, die erst vor wenigen Stunden die Eihülle verlassen hatten. Bei solchen jungen Individuen währt die Akinese nur kurze Zeit.

3. Ein wenige Tage altes Tier wandert über eine Spiegelscheibe, strauchelt und fällt auf die Seite. Nach 11″ erfolgt Aufrichtung und Weiterwandern. Einige Zeit danach hat das Tier dasselbe Mißgeschick noch einmal; nach 9″ dauernder Akinese wandert es weiter.

Blatta.

Auch hier ließ sich accidentelle Hypnose beobachten. Allerdings nicht in der freien Natur, wo das stabil ausgebildete Insekt selten zu Falle kommt. Hingegen auf glatter Fläche, z. B. auf dem Boden eines Porzellantroges. Legt man eine Blatta auf den Rücken, so treten bestimmt gerichtete Reflexbewegungen der Körperanhänge und des Kopfes auf, deren nähere Schilderung ich

hier unterlasse. Sie bewerkstelligen auf rauher Fläche die Umkehr des Insekts. Auf glatter ist sie ihm meist unmöglich. In diesem Fall folgen auf Perioden verstärkter Tätigkeit (Stemm- und Schaufelbewegungen der Beine, Wenden des Kopfes und starke Bewegungen der Antennen) Intervalle relativer Ruhe, während welcher Beine und Kopf völlig ruhig bleiben und nur die Mundwerkzeuge und Antennen etwas spielen. Ein Beispiel möge dies erläutern: Es bezeichne B eine Periode erhöhter Aktivität, R eine solche relativer Ruhe, die davorstehende Zahl die Anzahl der Sekunden; dann ergab sich in einem Fall folgende Serie:

51" B, 2" R, 105" B, 2" R, 29" B, 1" R, 13" B, 5" R, 68" R, 8" R, 27" B, 9" R, 10" B, 31" R, 104" B, 42" R, 77" B, 11" R, 2" B, 2" R, 24" B, 8" R, 37" B, 8" R, 19" B, 6" R, ...

Viele Tiere können sich stundenlang so oder ähnlich verhalten. Später nehmen die Intervalle relativer Ruhe manchmal zu, verändern jedoch sonst nicht ihren Charakter.

Neben solchen normal sich verhaltenden Tieren kommen nun gelegentlich andere vor, die nach kürzerem oder längerem Zappeln zur absoluten Bewegungsslosigkeit übergehen, die auch nach sonstigem Verhalten als Hypnose angesprochen werden muß. Sodann beobachtete ich wiederholt spontanen Eintritt von Hypnose bei Tieren, die ich in einer 47/40 cm großen viereckigen Porzellanschale mit steilen Wänden herumgejagt hatte, und die dabei auf den Rücken gefallen waren. Die Akinese konnte sofort erfolgen oder nach einigen äußerst schnellen Zappelbewegungen, die oft nur den Bruchteil einer Sekunde dauerten. — Ganz ähnliche Beobachtungen machte ich übrigens auch bei der accidentellen Hypnose des Tomocerus. Schon jetzt will ich erwähnen, daß ich mehrfach Schaben besessen habe, die schon bewegungslos wurden, wenn ich sie nur auf den Rücken legte. Auch hier beginnt das Erwachen meist mit leichten, kurz andauernden Fühlerbewegungen. Daran können sich wiederholt Perioden absoluter Akinese anschließen. Nach einiger Zeit erfolgen dann plötzliche Zappelbewegungen und Umkehrreaktionen. Es kommen auf diese Weise ähnliche Serien zustande wie die obenstehende, nur daß hier die Ruhestadien echte Hypnosen darstellen.

Hier möge kurz eine Analyse dieser Erscheinungen, wie sie sich mir auf Grund theoretischer Erwägungen und praktischer Erfahrungen ergeben hat, folgen:

Das verschiedene Verhalten des Insekts steht zweifellos in Beziehung zu ein und demselben Vorgang — der Umkehr. In Ver-

bindung mit ihr können offenbar 2 einander entgegengesetzte Reaktionen ausgelöst werden:

1. Kinese (als Umkehrreflexe)
2. Akinese (als Hypnose).

Bezeichnen wir mit K den Faktor oder die Faktoren, die zur Kinese, mit A jenen oder jene, die zur Akinese führen, so entsteht, wenn

$$A < K — \text{Kinese},$$
$$A > K — \text{Akinese}.$$

Worin unterscheidet sich nun ein auf dem Rücken liegendes Tier von einem solchen in Normalstellung? — Offenbar durch folgende Kennzeichen:

1. Die umgekehrte (ventro-dorsale) Lage des Körpers.
2. Die Berührung des Rückens durch die Unterlage.
3. Die Loslösung der Extremitäten von der Berührungsfläche.

In diesen 3 Faktoren muß also sowohl der Grund für die Auslösung der Umkehrreaktionen, wie für die Akinese zu suchen sein.

Suchen wir zunächst einmal nach der Ursache für die Auslösung der Umkehrreflexe:

No. 1 kommt für sie nicht in Betracht, wie das Verhalten von Schaben lehrt, die in verdunkeltem Raum stundenlang mit dem Rücken nach abwärts an horizontalen Flächen hängen. No. 2 ist ebenfalls irrelevant, wie aus folgendem Experiment hervorgeht: Man kann ein Tier in ein kleines, innen mit Watte gepolstertes, viereckiges Kästchen bringen, dessen eine Schmalwand fehlt. Wenn man nun das Kästchen und damit das Tier umkehrt, so bleibt das Insekt oft lange Zeit — bis eine Stunde und mehr — in seiner Lage, wie man sich überzeugen kann, wenn man nach einiger Zeit die nunmehr obere bewegliche Wand des Kästchens abhebt.

Es bleibt also als auslösendes Agens für die Umkehrreflexe No. 3 — die Loslösung der Extremitäten von dem Substrat.

Im Wattehäuschen ist das Insekt nur deshalb in Ruhe, weil die Extremitäten in Berührung mit der Watte stehen. Dasselbe Moment kommt zur Geltung, wenn man an die Tarsen der zappelnden Extremitäten eines auf dem Rücken liegenden Tieres Wattebäusche bringt: es hört dann sofort die Bewegung auf.

Was bewirkt nun aber in unserm Fall die Hypnose? Zweifellos No. 2, d. h. der durch die Unterlage auf dem Rücken ausgeübte Berührungsreiz. Unter Umständen ein solcher in Verbindung mit einer Shokwirkung. Wir haben gesehen, daß letztere

für Blatta nicht nötig ist. Gelingt es, die Umkehrreflexe zu beseitigen, so kann Hypnose in jeder Lage erfolgen.

Zu berücksichtigen ist jedoch, daß noch eine ganze Anzahl anderer Momente die Hypnose begünstigen oder stören können. Hierher gehören: Veranlagung, innere Disposition, bedingt durch Alter, Geschlecht, Ernährungszustand, Tagesturnus, sodann optische, akustische, chemische und mechanische Wirkungen.

Experimentelle Hypnose.

Auf viererlei Art gelang es mir, bei Insekten Hypnose zu erzeugen: 1. durch Erschütterungsreiz, 2. Berührungsreiz, 3. Hemmungsreiz, 4. Erfassungsreiz. In allen diesen Fällen handelt es sich eigentlich um mechanische Reize. No. 2 spielt auch bei den drei übrigen Reizen eine Rolle, kann aber auch allein schon zur Hypnose führen.

Erschütterungshypnose.

Den Erschütterungsreiz verwandte ich mit Erfolg bei Tomocerus plumbeus. Da das Tier sehr klein und zart ist, bedurfte es besonderer Künste, um es in Rücken oder Seitenlage zur Askinese überzuführen. Ich baute mir hierzu einen Hypnoseapparat. Er stellt eine an beiden Enden offene Kammer dar, die von zwei länglichen parallelen Glasplatten gebildet wird, welche durch zwei parallel liegende Glasstreifen auseinander gehalten werden. Glasplatten und Streifen sind mit Wasserglas aneinander gekittet. Die lichte Weite zwischen beiden Glasplatten ist etwas größer als die Vertikalhöhe des sitzenden Tieres. Beim Versuch wird in den Innenraum ein Tomocerus gesetzt und die Kammer, nachdem das Tier zur Ruhe gekommen ist, langsam umgedreht. Es bleibt mit Hilfe seines Ventratubus auch in dieser Lage haften. Nun wird der Apparat 3—4 cm hoch, parallel zur Unterlage, auf Holz oder Linoleum fallen lassen. Durch die Erschütterung wird das Tier von seinem Sitz losgerissen und mit dem Rücken gegen die untere Glasplatte geworfen, wodurch Hypnose ausgelöst wird.

Je nach der Reizstimmung des Individuums muß das Experiment ein oder mehrere Male ausgeführt werden. Bei jeder Erschütterung gehen konvulsivische Zuckungen durch den ganzen Tierkörper. Die durch die Erschütterung ausgelöste Hypnose dauert meist nur wenige Minuten, gelegentlich jedoch eine Viertelstunde und mehr. Das Erwachen geschieht langsam. Es wird

meist eingeleitet von Fühler-, später Kopfbewegungen; dann erhebt sich das Tier auf die Beine und geht langsam fort.

Folgende Möglichkeiten dürfen für den Eintritt der Hypnose angenommen werden:

1. Die Hypnose erfolgt plötzlich, d. h. in weniger als einer Sekunde

a) nach einmaliger Shok- oder Stoßwirkung, (wie nach Fehlsprung oder Fall, siehe oben)

b) nach mehrfacher Stoßwirkung. (Summation) Eine solche muß dann angenommen werden, wenn erst ein mehrmaliges identisches Fallenlassen des Hypnoseapparates zum Ziele führt[1]).

2. Die Hypnose erfolgt nicht plötzlich, sondern erst nach Erlöschen der Erschütterung. Es handelt sich um solche Fälle, wo ein Tier nach Auffallenlassen der Hypnosekammer nicht sofort bewegungslos wird, sondern erst einige Zeit später.

Beispiel: Nachdem die Hypnosekammer niedergefallen war, wanderte ihr Insasse aus ihr heraus und wurde erst nachdem er einen Weg von 2 cm zurückgelegt hatte bewegungslos. Nach einer Akinese von 60" erfolgte Erwachen und Fortlaufen.

Berührungshypnose.

Ich verstehe darunter eine Hypnose, die durch Berührung mit irgend einer Substanz ausgelöst wird. Der Berührungsreiz kann hierbei auf zweierlei Weise einwirken, entweder passiv bei Bewegungslosigkeit von Tier und berührendem Gegenstand, oder aktiv bei Bewegung eines der beiden. Ein ausgezeichnetes Beispiel für Hypnose durch passiven Berührungsreiz bieten gewisse Ruhezustände der Wasserwanze Limnotrechus lacustris, die dann eintreten können, wenn das Tier sich auf ein festes Substrat begibt und mit dessen Fläche in dauernde innige Berührung tritt. — Davon werde ich an anderer Stelle berichten. Sehr schöne Beispiele sah ich auch bei Tomocerus plumbeus. Bei dieser Form hat sich vor allem die Watte als ausgezeichnetes Mittel zur Erzeugung von Hypnose erwiesen. Ich gebe ein Beispiel:

1) Diese Betrachtung ist unabhängig von der Tatsache, daß auch bei einmaligem Fallenlassen der Hypnosekammer mehrfache Stoßwirkung infolge der Vibrationen des Glases angenommen werden kann. Wir wissen nicht, ob die hierauf erfolgende Akinese eines Tieres auf die Wirkung eines einzigen Stoßes oder einer Summe von Stößen zurückzuführen ist.

In die oben geschilderte Hypnosekammer wird seitlich je ein Wattebausch gesteckt, jedoch so, daß in der Mitte noch genügend Raum bleibt, um einen Tomocerus aufzunehmen. Ein solches Tier wandert in einem Fall zwischen den Wattebäuschen weiter, gerät mit ihnen in Berührung und wird unbeweglich. 420″ später erwacht es. Es arbeitet sich alsdann an der Watte entlang und wird abermals bewegungslos. 120″ später erfolgt neues Erwachen. Das Tier liegt während der Akinese auf dem Rücken oder der Seite. Daß es sich wirklich um tonische Hemmung der Ortsbewegung und Lage-Korrektion handelt beweist die Möglichkeit, dem Apparat jede beliebige Richtung zu geben, ohne daß das Tier hierdurch veranlaßt wird, seine Lage zu ändern. So kann man es z. B. auf den Kopf stellen. Ein oder die andere Wattefaser hält es dann in dieser Situation fest, so daß es nicht aus dem Apparat fällt. Folgender Kontrollversuch beweist, daß ein nicht akinetisches Tier in einem ähnlichen Fall sofort seine Lage korrigiert: Dreht man einen Hypnoseapparat, auf dessen innerer Bodenfläche ein Tier sitzt um 180°, sodaß es nun mit dem Rücken nach abwärts gekehrt ist, so fällt es bei einer kleinen Erschütterung mit letzterem auf die untere Scheibe. Da die lichte Weite des Apparats 2 mm, das Tier selbst etwas über 1 mm hoch ist, so ist der Shok minimal, sodaß keine Hypnose erfolgt. Das Tier versucht sich alsdann, im Gegensatz zu ersterem Versuch, sofort umzukehren. Ich habe dieses Experiment bis 25 mal hinter einander mit demselben Erfolg wiederholt.

Es ist also zweifellos der Berührungsreiz der Watte, welcher die Hypnose erzeugt. — Man kann denselben Effekt erzielen, wenn man ein Tier in wollig lockere Watte springen läßt. Dies Experiment ist natürlich nicht mit der Hypnose nach einem Fehlsprung (accidentelle Hypnose) zu vergleichen, bei der es sich ja um die Folgen eines Erschütterungsreizes handelt. Auch dadurch kann man zum Ziel gelangen, daß man ein im Hypnoseapparat befindliches Tier plötzlich mit Wattefasern umgibt, die es berühren. —

Auch für Blatta orientalis lassen sich leicht Fälle von Berührungshypnose nachweisen. Legen wir ein Tier mit dem Rücken in eine zur Rinne gebogenen Wattelage, so kann es, nach einigen matten Kriech- und Aufrichtungsversuchen, plötzlich für längere Zeit erstarren. Geschieht dies nicht, so können wir häufig Akinese erreichen, indem wir Wattefasern auf die sich bewegenden Beine legen. Jede Berührung erzeugt sofort ein Langsamerwerden und schließlich Aufhören der Bewegung. Wohlgemerkt, es

handelt sich dabei nicht um eine Hemmung der Bewegung durch Widerstand — das Tier kann die Watte mit Leichtigkeit von seinen Beinen entfernen — sondern um den Einfluß des Berührungsreizes. Das Tier befindet sich auch nicht, wie bei dem Wattehäuschenversuch im Dunkeln, Kopf und Rumpf sind frei — nur die Extremitäten sind bedeckt. Mit dieser Methode kann man bei geeigneten Individuen unter Umständen außerordentlich lang andauernde Hypnosen erzielen. Bei einem Tier, daß durch Rückenlage auf Watte und Belegen der Extremitäten mit solcher in Hypnose versetzt worden war, wurde nach einstündiger Akinese die Watte von der rechten Seite weggenommen. Das Tier blieb dabei völlig bewegungslos. Die Extremitäten ließen sich nach allen Seiten biegen, ohne daß es erwachte. Erst nachdem die rechte Seite 5 Minuten lang unbedeckt gelegen hatte, zeigten sich hier Bewegungen: Die rechten Gehbeine begannen sich zu rühren, dann der r. Palpus labialis und die r. Antenne. Auf der linken Seite hingegen blieb zunächst noch alles ruhig — auch die Antenne und der Palpus labialis, trotzdem beide unbedeckt waren. Erst einige Zeit später griff die Bewegung auch auf diese Seite über. Das Tier kehrte sich dann um und wurde sehr lebhaft.

Die längste Dauer einer durch Umkehr und Watteauflage erzeugten Hypnose, die ich bei Blatta orientalis beobachtet habe, dauerte 2 Stunden, 32 Minuten.

Hemmungshypnose.

Ich gebrauche hierzu im Prinzip dieselbe Methode, die schon seit weit mehr als 200 Jahren bei der Erzeugung von Hypnose bei Wirbeltieren angewendet wird.

Ich lege eine Schabe mit dem Rücken auf Watte und unterdrücke die Umkehrbewegungen, indem ich jederseits mit Zeigefinger und Daumen die Extremitäten sanft nach unten presse. Wenn ich keinen Widerstand mehr fühle entferne ich vorsichtig die Hand. Das Resultat ist, je nach Disposition und Veranlagung der Tiere, äußerst variabel. Ich habe mit vielen Hunderten von Schaben experimentiert und habe immer wieder verschiedene Resultate bekommen. Allerdings hängt mancherlei von der Geschicklichkeit des Experimentators ab. Vielfach bleibt der Finger an den Borsten der Insektenbeine hängen, sodaß die Hypnose beim Entfernen der Hand sofort wieder aufgehoben wird. Viele Schaben sind indessen refraktär und sind durch noch so vorsichtige Versuche nicht zur Hypnose zu zwingen; andere werden sofort akinetisch; wieder andere sind zwar erst refraktär, werden jedoch allmählich der

Hypnose zugänglich. Ebenso variabel wie die Hypnosefähigkeit ist die Hypnosedauer. Hypnotisiert man mehrmals hinter einander, so können sich die Hypnosezeiten lange auf ungefähr derselben Höhe halten. Bei sehr ausgedehnten Serien verlängert sich meist die Hypnosdauer. Hier könnte man an eine Beeinflussung durch Ermüdung denken. Diese darf aber nur dann angenommen werden, wenn das Tier nach Erwachen nicht mehr frisch ist. Allerdings erfolgt nie nach der Hypnose sofort die Umkehr; je tiefer sie war und je länger sie dauerte, desto langsamer geht auch das Erwachen vor sich. Zunächst besteht noch eine kurze Zeit lang Somnolenz. nach der aber sehr schnell volle Frische eintritt. Geschieht dies nicht, so haben wir es mit einem lädierten Tier zu tun, das zum Experiment nicht taugt[1]).

Während im Allgemeinen die Dauer der Akinese sich mit der Zahl der Hypnosen verlängert, gibt es wiederum Fälle, wo ein anfänglich hypnotisierbares Tier immer mehr refraktär wird, bis es überhaupt nicht mehr zur Ruhe gebracht werden kann. Dies erinnert an die Holmesschen Versuche mit Ranatra, bei denen die Tiere ebenfalls zuletzt refraktär wurden. Läßt man ein Tier, das innerhalb einer Serie immer länger andauernde Akinesen zeigte, nach dem Erwachen kurze Zeit herumlaufen, so erlangen von jetzt ab die Hypnosen wieder kürzere Dauer. Dies erklärt sich folgerichtig so: Die Hypnose ist auf Lähmung gewisser Nervenzentren zurückzuführen. Eine allgemeine Erregung, wie sie die Lokomotion erzeugt, muß notwendig auch auf diese Zentren einwirken. So ist es auch verständlich, daß die Hypnosedauer im allgemeinen um so schneller zunimmt, je eher wir das Tier nach dem Erwachen wieder beeinflussen. Wird es immer sofort wieder hypnotisiert, wenn die ersten Fühlerbewegungen auftreten, so erfolgt die Akinese immer schneller und ebenso wächst ihre Dauer.

Ich gebe jetzt eine kleine Auswahl von Serien, welche die erwähnten Dinge näher erläutern. Die Hypnosedauer ist bei meinen Individuen häufig sehr kurz. Um so deutlicher lassen sich hypnoseverlängernde Faktoren erkennen:

---

1) Ich möchte jedoch darauf hinweisen, daß mehrfach in der Literatur behauptet wird, daß tierische Hypnose zum Tode führen kann.

1) Serie von 86 auf einander folgenden Hemmungshypnosen mit ziemlich gleichbleibender Wirkungsdauer[1]).

♀

12", 12", 10", 18", 8", 10", 18", 6", 42", 10", 6", 24", 23", 21", 24", 25", 21", 55", 32", 71", 31", 46", 15", 13", 24", 48", 17", 36", 17", 18", 9", 16", 27", 25", 25", 39", 20", 32", 11", 21", 20", 6", 11", 18", 24", 19", 29", 41", 10", 10", 13", 16", 20", 50", 10", 12", 8", 15", 17", 18", 19", 17", 12", 38", 23", 38", 24", 35", 20", 22", 13", 15", 28", 30", 22", 18", 57", 14", 13", 41", 36", 34", 23", 33", 20".

2) Serie von 40 Hemmungshypnosen mit cumulierender Wirkung. Das Tier wurde **sofort** wieder hypnotisiert, wenn es sich grade zu regen begann. Überraschend ist das plötzliche Anschwellen im 31. Glied:

♂

20". 25", 20", 20", 15", 25", 35", 40", 40", 41", 45", 35", 50", 51", 57", 56", 55", 75", 76", 95", 75", 74", 70", 80", 91", 80", 92", 75", 70", 75", 210", 230", 255", 345", 310", 325", 180", 491", 1155", 2046".

Nach dem letzten Versuch gestattete ich dem Tier, wegzulaufen. Die nun folgenden Hypnosen zeigen wieder viel kürzere Zeiten. Die durch die Lokomotion erzeugte Erregung hatte offenbar die Cumulationswirkung der einzelnen Hypnosen wieder aufgehoben: 77", 55", 17", 16", 17", 20", 85", 55", 45".

Das Beispiel eines refraktären Tieres, das zur Hypnose gezwungen wird, werde ich später bei Besprechung einer andern Erscheinung bringen.

3) Serie von 47 auf einander folgenden Hemmungshypnosen, nach denen Refraktabilität eintritt:

♀

58", 21", 32", 19", 44", 33", 28", 18", 9", 26", 27", 18", 29", 22", 13", 10", 13", 34". 21", 30", 34", 38". 15", 35", 18", 3", 3", 4", 3", 3", 3", 3", 6", 14", 8", 8", 3", 3", 3", 0", 0", 3", 0", 0", 0", 0", ...

---

1) Die neue Hypnose wurde immer erst dann in Angriff genommen, wenn das Tier im Begriff war, sich umzukehren. Die relative Ungleichheit der einzelnen Hypnosen hat hier weniger Bedeutung, als im Fall, wo ihre Dauer eine größere ist. Eine Hypnose von 10" unterscheidet sich wenig von einer solchen von 20". Anders verhält es sich, wenn sie in einem Fall 10", in einem andern 20' beträgt.

4) Kleine Serie mit höheren Werten[1]:

♀

240", 480", 560", 540", 300", 180", 180", 540".

Hypnoseverlängerung durch aktiven Berührungsreiz.

Bei der Erzeugung der Hemmungshypnose spielen zweifellos 2 Faktoren eine Rolle — die Unterdrückung der Umkehrbewegungen und der Berührungsreiz mit der Unterlage. Wir haben ja gesehen, daß Berührungsreiz allein schon zur Hypnose führen kann. (Daß auch die Qualität des berührenden Mediums nicht gleichgültig ist, läßt sich leicht nachweisen, wenn man das Experiment auf verschiedenen Unterlagen versucht. Je weicher und anschmiegender der betr. Stoff ist, desto besser geht der Versuch.) Da der passive Berührungsreiz demnach entschieden eine Rolle bei der Hypnose spielt, und zwar auch nach Eintritt der Akinese, so ist erklärlich, daß sich ein auf Watte hypnotisiertes Tier im allgemeinen nur dann aus seiner Lage bringen läßt, ohne daß es erwacht, wenn man gleichzeitig die Unterlage mit ihm in Kontakt läßt. Man kann also das Tier — sofern es an der Watte hängen bleibt — mit dieser in die verschiedensten Lagen bringen. Doch erzeugt die hierdurch entstehende Zugwirkung eine gewisse Gefahr für den Verlauf des Experiments, insofern hierdurch unter Umständen das Erwachen herbeigeführt werden kann. Solche und ähnliche Beobachtungen brachten mich zur Anstellung eines neuen Versuches, den ich als Wattekragen-Versuch bezeichnen will. Er führte zu einigen neuen interessanten Resultaten, für welche wir analoge Erscheinungen bei der an anderm Ort zu besprechenden Erfassungshypnose finden werden. Man kann nämlich Hemmungsreiz und Berührungsreiz auch so zur Auswirkung bringen, daß man in eine kleine Wattelage ein Loch schneidet und durch dieses schnell den Kopf einer Schabe steckt, und zwar so, daß die Antennen nicht frei aus der Öffnung ragen, sondern durch die Watte dem Körper des Tieres eng angepreßt werden und nach hinten gekehrt sind. Der Wattekragen muß außerdem, wenn der Versuch gelingen soll, mindestens die Femora der ersten Extremitäten zusammenpressen. Noch besser ist es, wenn er auch bis zum oberen Teil des 2. Beinpaares reicht. Kopf und Prothorax können nach außen sehen, doch ist es gut, wenn beide von einigen Wattefasern überspannt werden. Geschieht das Überziehen des Wattekragens schnell, so

1) Leider wurden bei dieser Serie durch ein Versehen nur die Minuten aufgeschrieben.

tritt in vielen Fällen sofort Akinese ein. Beim Erwachen erfolgt allgemeine Zappelbewegung. Das Tier befreit sich dann meist sehr geschickt von seiner Fessel, indem es entweder den Kragen abstreift oder durch ihn hindurchschlüpft.

In diesem Zustand kann man nun dem Tier jede beliebige Lage geben, indem man den Wattekragen mit der Pinzette an irgend einer Stelle erfaßt und das Insekt daran emporhebt. Die Dauer der Akinesen sind auch hier recht verschieden, häufig auch innerhalb der Serie, wohl schon deshalb, weil es sehr schwer fällt, jedesmal den Wattekragen in derselben Weise über das Tier zu ziehen. Ich gebe drei Beispiele:

♀

5) 390″, 375″, 609″, 362″, 484″, 122″, 302″, 181″, 184″, 120″, 545″.

♂

6) 120″, 65″, 30″, 30″, 21″, 35″, 32″, 62″, 28″, 58″, 21″, 33″.

♀

7) 183″, 182″, 781″.

Aber nun kommt etwas Neues: Während ich bei der gewöhnlichen Hemmungshypnose das Tier mechanisch nur zart behandeln darf, wenn ich es nicht erwecken will, kann ich mit dem Wattekragen-Tier alle möglichen Dinge vornehmen, ohne daß es erwacht: ich rolle es auf dem Tisch umher, zwicke es kräftig in die Extremitäten, hebe es an einem Bein in die Höhe. Nichts kann es aus dem Zustand der Bewegungslosigkeit herausbringen — ja, ich schneide ihm ein Stück des Beines unterhalb des Femurendes ab, ohne daß es die geringste Bewegung macht. Es herrscht also absolute Analgesie. Aber mehr noch — alles Berühren, Kneifen, Zerren des Tieres bewirkt nur, daß es bedeutend länger bewegungslos bleibt, als wenn ich es ruhig auf dem Tische liegen lasse[1]).

In einem Fall war die Hypnosedauer eines Wattekragen-Tiers bei ruhiger Lage nur 42″ gewesen. Beim nächsten Versuch behandelte ich das Tier wie oben geschildert. Es blieb alsdann 900″ regungslos. Nun legte ich es auf den Rücken, nach 120″ erwachte es und befreite sich aus dem Wattekragen.

Wodurch wird nun dieses verschiedene Verhalten verursacht?

---

1) Dieses letztere Verhalten deckt sich mit dem bei der Thanatose. Hiermit wird zugleich dieses Scymanskische Unterscheidungsmoment zwischen Hypnose und Thanatose hinfällig.

Folgende Momente kommen in Betracht:

1) Die Hemmung der Abwehrbewegungen,

2) Der passive Berührungsreiz durch den Wattekragen,

3) Der aktive Berührungsreiz des Herumrollens, Kneifens usw.

Neu hinzugekommen ist also der aktive Berührungsreiz, und dieser scheint hypnoseverlängernd zu wirken. Man sieht nun nicht recht ein, warum letztere nicht auch bei dem auf Watte liegenden, akinetischen Tier seine Wirkung tun sollte. In der Tat ist es mir gelungen, auch hier die Hypnose durch aktiven Berührungsreiz in ganz überraschender Weise zu verlängern. Nur hat sich gezeigt, daß in diesem Zustand die Wirkung um so sicherer ist, je feiner der Reiz dosiert wird. Zu diesem Zweck drehe ich mit den Fingern einen Wattebausch zu einer Spitze, die in eine einzelne Faser ausläuft. Mit dieser Faser bestreiche ich sanft Kopf, Thorax und Abdomen des akinetischen Tieres. Die Extremitäten zu bestreichen hat sich als unzweckmäßig erwiesen, weil die Faser hierbei leicht an einem Haar oder einer starren Borste hängen bleibt, was zum Erwecken führen kann. Übrigens genügt es häufig, nur ein bestimmtes kleines Territorium zu bestreichen, so den Thorax, das Abdomen oder gar den Kopf, ja, es gelang mir sogar gelegentlich, durch unaufhörliches gleichmäßiges Betupfen einer Körperstelle den erwähnten Effekt zu erzielen.

Um die Wirkung des aktiven Berührungsreizes klar vor Augen zu führen schalte ich in eine gewöhnliche Serie von Hemmungshypnosen ab und zu eine solche mit aktivem Berührungsreiz ein. Die Dauer der letzteren überragt dann jedesmal jene der gewöhnlichen Hypnosen um ein Bedeutendes. Wenigstens trifft dies immer für die vorhergehenden Hypnosen zu. In manchen Fällen, namentlich wenn die Dauer der Hypnose mit aktivem Berührungsreiz sehr bedeutend jene der gewöhnlichen Hypnosen übertrifft, zeigt es sich, das eine lange Hypnose auch verlängernd auf die Dauer der nachfolgenden einfachen Hypnosen einwirken kann. Dies ist begreiflich, da bei jedem erwachenden Tier noch einige Zeit eine gelinde Somnolenz besteht, die um so tiefer ist, je länger die vorausgehende Hypnose gedauert hat und anderseits der Grad dieser Somnolenz die Tiefe der nächsten Hypnose beeinflußt. Allerdings ist dies keineswegs immer der Fall. Besonders überzeugend sind Fälle von Tieren, die zur Refraktabilität neigen, wie No. 8, 10, 13 der nachfolgenden Beispiele:

8) 67", 21", 25", 15", 4", 10", 10", 15", 15", 21", 39", 36", **170"**, 4", 4", 6", 8", **280"**, 5", 5", 6", 8", 3", 23", 20", 3", 4", 3", 0",. . . . .

9) 87", 23", 125", 65", 119", 87", **320**", **345**", **270**", **570**", 85", 32", 65", 54". 25".

10) 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 15", 5", 35", 25", 5", 3", 3", 4", 3", **330**".

11) 5", 4", 3", 3", **242**", 7", 3", 9", 16", 14", 11", 6", 13", **210**", 5", 4", 10", 12", 17", 52", 46", 55", 170", 10", 95", 85", **905**", 5", 4", 5".

12) 11", 11", 8", 11", 20", 33", 28", 5", 23", 42", **626**", **208**", **470**", **193**", 196", 13", 16", 40", 30", 190", 10".

13) 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", **66**", 12", 4", 4", 4", 6", 0", **16**", **83**", 5", 12", 24", 12", 16", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", **25**", **70**", **353**", 0", 16", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 20", 29", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 40", 14", 0", 0", 0", 0", 14", 0", 0", 0", 0", 45", 50", 0", 0", 0", 22", **217**", **180**", **110**", 0", 0", 0", 0", 40", 102", 254", 40", 0", 0", 0", 14", 220", 40", 105", 858", 0", 0", 0", 0", 0", 24", 75", 5", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 0", 130", **534**".

14) . . . . . 44", 136", 151", 188", 232", 360", 29", 170", 190", 250", 64", 134", 140", 30", 30", 43", 32", 50", **345**", **371**", **2346**", **1621**" [1]), 33", 40", 48", 80".

Besonders interessant ist die Serie No. 13, bei der es sich um ein anfangs fast völlig refraktäres Tier handelt. Die Hypnotisierung in diesem Zustand durch aktiven Berührungsreiz wurde so vollführt daß noch beim Festhalten die Berührung der Wattefaser vorgenommen wurde. Es gelang jedoch nicht jedesmal hierdurch eine Hypnose zu erzielen. — Wenn die Serie (abgesehen von der aktiven Berührungshypnose) so ungleich ist wie in No. 14, so beruht dies wohl auf äußeren Umständen (Hängenbleiben des Fingers an Borsten, unvorteilhafte Lage des Tieres und dergl.). Diese Dinge kommen jedoch kaum in Betracht, wo sich der aktive Berührungsreiz so deutlich bemerkbar macht wie in No. 14.

Abkühlung als hypnoseverlängerndes Agens.

Wir haben schon erfahren, daß jede Erregung sowohl für die Versetzung in Akinese wie für deren Dauer nachteilig ist. Im Gegensatz hierzu sind alle beruhigenden und lähmenden Wirkungen hypnosebegünstigend. Zu letzteren gehört z. B. die Kälte. Blatta orientalis, die ja nachweislich aus dem südlichen Asien nach Europa einwanderte, ist nun ein exquisites Wärmetier. Schon bei längerer

1) Versuch durch Versehen vor Beendigung der Hypnose unterbrochen.

Einwirkung kühlerer Temperaturen von einigen Graden über Null wird sie bewegungslos. Auf den Rücken gelegt bleibt sie alsdann unter Umständen stundenlang in dieser Lage. Der Unterschied gegenüber der hypnotischen Akinese ist äußerlich sofort an dem Ausbleiben der Umkehrreflexe erkennbar. Auch stärkste Reize bewirken im Zustand der Kältestarre nur einige lässige, reflektorische Bewegungen.

Hemmungshypnosen bei Blatta orientalis unter Einwirkung von Abkühlung.

Ordnungszahl	Geschl.	Temper.	Serie	Bemerkungen
No. 15	♀	21° C.	0", 0", 0", 14", 25", **92"**, **152"**, **76"**, **35"**, **66"**.	Zuerst refraktär, vom 6. Glied an aktiver Berührungsreiz.
		0° C.		Während 10'.
		21° C.	1220".	
		21° C.	20", 11", 10", 15", 26", 12", 24", **250"**, **240"**, **243"**, **102"**, **108"**, **141"**.	Nach Erwachen aus der Abkühlungshypnose 1/4 Stunde Ruhe bei 21° C. Dann nebenstehende Hypnosen.
No. 16	♂	20° C.	5", 13", 5", 13", 15", 17", 6", 8", 17", 5", 16", 17", 23", 19", 20", 31", 20", 22", 20", 35".	Gewöhnliche Hemmungshypnose auf Watte.
		7° C.	50", 210", 991", 200", 313", 1270", 320", 2510".	Hypnose nach 3 Minuten Einwirkung dieser Temp.
No. 17	♂	20° C.	23", 11", 7", 7", 20", 17", 18", 14", 7", 10", 9", 10".	Hemmungshypnose auf Watte.
		5° C.	3000" . . . [1]).	Nach 5 Minuten Einwirkung hypnotisiert.

Man kann nun auf zweierlei Weise die Kältewirkung prüfen: Entweder indem man das Tier einige Zeit der Abkühlung aussetzt

1) Nachdem die Hypnose 50 Minuten gedauert hatte, mußte ich mich für 1/4 Stunde entfernen. Als ich wiederkam hatte das Tier das Gefäß verlassen.

und dann bei normaler Temperatur hypnotisiert, oder indem man die Hypnose während der Abkühlung vornimmt. Bei ersterer Versuchsanordnung ist es angebracht, eine stärkere Abkühlung vorzunehmen, da ihre Nachwirkung sukzessive mit der Erwärmung des Tieres abnehmen muß. Vorteilhaft ist natürlich auch hier, wenn der Kälteversuch innerhalb einer Serie anderer Hypnosen steht. Die vorstehende Tabelle ist wohl ohne weiteren Kommentar verständlich.

Eine zweite Abhandlung, die an gleicher Stelle erscheinen soll, wird sich mit der Erfassungshypnose und andern hypnoiden Erscheinungen beschäftigen.

Zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems.

Von

Edmund Landau.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Februar 1921.

Die Behandlung des *major arc* auf S. 44—50 der Hardy-Littlewoodschen Abhandlung im Jahrgang 1920 dieser Nachrichten (S. 33—54) läßt sich durch folgende kürzere ersetzen.

Ich benutze vier bekannte Tatsachen:

1) Es sei $0 < w \leqq 1$. Die für $\sigma > 1$ durch $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+w)^s}$ definierte Funktion $\zeta(s, w)$ ist bis auf den Pol $s = 1$ mit dem Residuum 1 überall regulär; für $\sigma < 0$ (im Fall $w < 1$ auch für $s = 0$) ist

$$(1) \quad \begin{cases} \zeta(s, w) = \Gamma(1-s) \dfrac{2}{(2\pi)^{1-s}} \left(\sin \dfrac{\pi s}{2} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2\pi m w}{m^{1-s}} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \cos \dfrac{\pi s}{2} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2\pi m w}{m^{1-s}} \right). \end{cases}$$

2) Für $0 < \alpha < \beta$, $H > 0$, $\gamma \gtreqless 0$ ist

$$(2) \qquad \left| \int_{\alpha}^{\beta} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} u H (\log u + \gamma)\, du \right| \leqq 6 \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{H}}.\ ^{1)}$$

Ich bemerke gleich, daß für $0 < \varepsilon < 1$ und ganzes $k > 2$ aus (2) nach dem zweiten Mittelwertsatz folgt:

$$\left| \int_0^{H^\varepsilon} e^{-u} u^{\varepsilon\left(1 - \frac{1}{k}\right)} e^{-uHi(\log u + \gamma)}\, du \right| < B(\varepsilon, k)\, H^{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}},$$

1) Vergl. z. B. Hilfssatz 1 meiner Arbeit *Über die Gitterpunkte in einem Kreise* (Dritte Mitteilung) [Diese Nachrichten, Jahrgang 1920, S. 109—134], wo $g(u) = uH(\log u + \gamma)$ zu setzen ist.

wo B von H und γ unabhängig ist, also

$$\left|\int_0^\infty e^{-u} u^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)} e^{-uHi(\log u+\gamma)}\,du\right|$$

$$< B(\varepsilon,k)\,H^{\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}} + \int_{H^\varepsilon}^\infty e^{-u} u^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\,du$$

(3) $$< B(\varepsilon,k)\,H^{\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}H^\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{2}} u^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\,du < B_1(\varepsilon,k)\,H^{\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}}.$$

3) Nach Herrn Mellin[2]) ist für $0<|x|<1$, wenn

$$x_{p,q} = e^{\frac{2\pi i p}{q}} \quad (0 \leqq p < q,\ (p,q)=1), \quad x = x_{p,q}X, \quad X = e^{-\eta},$$
$$-\pi < \Im\eta \leqq \pi$$

gesetzt wird, η^z die Bedeutung $e^{z(\log|\eta|+i\arg\eta)}$ mit $|\arg\eta|<\frac{\pi}{2}$ hat und $k>2$ ganz ist,

$$\sum_{m=1}^\infty x^{m^k} = \sum_{m=1}^\infty x_{p,q}^{m^k} e^{-\eta m^k} = \sum_{m=1}^\infty x_{p,q}^{m^k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{2}{k}-\infty i}^{\frac{2}{k}+\infty i}\Gamma(s)\,\eta^{-s} m^{-ks}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i k}\sum_{m=1}^\infty x_{p,q}^{m^k}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}} m^{-s}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i k}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}}\sum_{m=1}^\infty x_{p,q}^{m^k} m^{-s}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i k}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}} q^{-s}\sum_{h=1}^q x_{p,q}^{h^k}\zeta\left(s,\frac{h}{q}\right)ds$$

(4) $$\begin{cases} = \frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\eta^{-\frac{1}{k}} q^{-1} S_{p,q} + \sum_{h=1}^q x_{p,q}^{h^k}\zeta\left(0,\frac{h}{q}\right) \\ + \frac{1}{2\pi i k}\int_{-\varepsilon-\infty i}^{-\varepsilon+\infty i}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}} q^{-s}\sum_{h=1}^q x_{p,q}^{h^k}\zeta\left(s,\frac{h}{q}\right)ds, \end{cases}$$

falls $0<\varepsilon<1$.

---

2) Vergl. z. B. § 2 seiner Arbeit *Bemerkungen im Anschluss an den Beweis eines Satzes von Hardy über die Zetafunktion* [Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A, Bd. XI (1917), No. 3].

4) Für festes σ und wachsendes $|t|$ ist

$$(5)\qquad \Gamma(s) = b(\sigma)\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\, |t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\, e^{ti(\log|t|-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right).$$

Nach (1) ist das Integral in (4) (bei Hardy-Littlewoodscher Bedeutung von $S_{p,q,m}$, $S'_{p,q,m}$)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon-\infty i}^{-\varepsilon+\infty i}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^s \Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_{p,q,m}}{m^{1-s}}\right.$$
$$\left.+\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{S'_{p,q,m}}{m^{1-s}}\right)ds,$$

also gleich der Summe der beiden Ausdrücke ($s=-\varepsilon+ti$)

$$(6)\ \frac{i}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}S\\S'\end{Bmatrix}_{p,q,m} m^{-1-\varepsilon}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{-\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi m}{q}\right)^{ti}\Gamma(1-s)\begin{Bmatrix}\sin\\\cos\end{Bmatrix}\frac{\pi s}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}}\,dt.$$

Hierin ist nach (5) für $t \gtrless 0$

$$\Gamma(1-s)\begin{Bmatrix}\sin\\\cos\end{Bmatrix}\frac{\pi s}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)$$

$$= b_1(\varepsilon,k)\, e^{-\frac{\pi|t|}{2k}}\, |t|^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\, e^{-t\left(1-\frac{1}{k}\right)i(\log|t|+\gamma_1)} + g(t) = G(t)+g(t),$$

wo γ_1 reell ist und nur von k abhängt, $g(t)$ stetig, beschränkt und $O\left(e^{-\frac{\pi|t|}{2k}}\,|t|^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)-1}\right)$ ist.

Auf dem *major arc* ist in den Hardy-Littlewoodschen Bezeichnungen

$$(7)\qquad \frac{1}{n} \leqq |\eta| < A,$$

$$(8)\qquad |\arg\eta| = \left|\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta}{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right| < \operatorname{arc\,tg}\frac{An^a}{q} < \frac{\pi}{2}-\frac{Aq}{n^a};$$

wegen

$$\left|\eta^{-\frac{s}{k}}\right| = |\eta|^{\frac{\varepsilon}{k}}\, e^{\frac{t}{k}\arg\eta} < A\, e^{\frac{|t|}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{Aq}{n^a}\right)}$$

ist

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi m}{q}\right)^{ti} g(t)\,\eta^{-\frac{s}{k}}\,dt\right| < B_2(\varepsilon,k)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Aq}{n^a}|t|}\,|t|^{\varepsilon-1}dt$$

$$(9)\qquad = B_3(\varepsilon,k)\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\varepsilon}.$$

Andererseits ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi m}{q}\right)^{ti} G(t)\,\eta^{-\frac{s}{k}}\,dt$$

$$b_1(\varepsilon,k)\,|\eta|^{\frac{\varepsilon}{k}}\,e^{\frac{\varepsilon i}{k}\arg\eta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{sign}t\,.\arg\eta\right)}\,|t|^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\,e^{-t\left(1-\frac{1}{k}\right)i(\log|t|+\gamma_2)}\,dt,$$

wo das reelle γ_2 von ε, k, m, q, η abhängt. Hierin ist rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\int_0^{\infty}+\int_{-\infty}^{0}$$

$$=\left(\frac{k}{\frac{\pi}{2}-\arg\eta}\right)^{1+\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\int_0^{\infty} e^{-u}\,u^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\,e^{-ui\frac{k-1}{\frac{\pi}{2}-\arg\eta}(\log u+\gamma_3)}\,du$$

$$+\left(\frac{k}{\frac{\pi}{2}+\arg\eta}\right)^{1+\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\int_0^{\infty} e^{-u}\,u^{\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)}\,e^{ui\frac{k-1}{\frac{\pi}{2}+\arg\eta}(\log u+\gamma_4)}\,du,$$

wo die reellen γ_3, γ_4 von ε, k, m, q, η abhängen. Nach (3), (7) und (8) ist also

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi m}{q}\right)^{ti} G(t)\,\eta^{-\frac{s}{k}}\,dt\right| < B_4(\varepsilon,k)\left(\frac{n^a}{q}\right)^{1+\varepsilon\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}}$$

(10) $$\leqq B_4(\varepsilon,k)\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon},$$

wo B_4 von m, q, η frei ist.

Aus (9) und (10) folgt

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi m}{q}\right)^{ti}\Gamma(1-s)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\frac{\pi s}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}}\,dt\right| < B_5(\varepsilon,k)\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon},$$

also nach dem zu (6) bemerkten und wegen[3]) $S_{p,q,m}=O\left(q^{\varkappa+\varepsilon}\right)$, $S'_{p,q,m}=O\left(q^{\varkappa+\varepsilon}\right)$

$$\int_{-\varepsilon-\infty i}^{-\varepsilon+\infty i}\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)\eta^{-\frac{s}{k}}\,q^{-s}\sum_{h=1}^{q} x_{p,q}^{h^k}\,\zeta\left(s,\frac{h}{q}\right)ds$$

---

3) Hardy-Littlewood, S. 40.

$$= O\left(q^{\varkappa+\varepsilon} q^{\varepsilon}\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon}\right) = O\left(q^{\varkappa-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} n^{\frac{a}{2}+\frac{3}{2}a\varepsilon}\right) = O\left(n^{a\varkappa+\varepsilon}\right).$$

Das zweite Glied in (4) ist wegen (1) und $\zeta(0,1) = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{q-1} x_{p,q}^{h^k} \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi m h}{q}}{m}$$ [4)]

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{q^2} \frac{S'_{p,q,m}}{m} + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{q-1} x_{p,q}^{h^k} \sum_{m=q^2+1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m \frac{h}{q}}{m}$$

$$= -\frac{1}{2} + O \sum_{m=1}^{q^2} \frac{q^{\varkappa+\frac{\varepsilon}{2}}}{m} + O \sum_{h=1}^{q-1} 1 \cdot \frac{1}{q^2 \frac{1}{q}} = O\left(q^{\varkappa+\varepsilon}\right) = O\left(n^{a\varkappa+\varepsilon}\right).$$

Wegen $\eta^{-\frac{1}{k}} = \left(\log \frac{1}{X}\right)^{-a}$ ergibt (4) also die Behauptung

$$f(x) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^k} = 2\Gamma(1+a)\,\frac{S_{p,q}}{q}\left(\log\frac{1}{X}\right)^{-a} + O\left(n^{a\varkappa+\varepsilon}\right).$$

---

4) $\sum_{h=1}^{q-1}$ bedeutet 0 im Falle $q = 1$.

Über die Intensität der Hauptphase eines Bebens in ihrer Beziehung zur Tektonik.

(Vorläufige Mitteilung)

Von

H. Reich.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 25. Februar 1921.

In den Seismogrammen fernerer Beben wird bekanntlich die Erderschütterung in drei Phasen aufgezeichnet: 1. und 2. Vorläufer und Hauptphase. Die beiden Vorläufer gehen durch das Innere der Erde, während die Hauptphase von den oberen Schichten der Erde fortgepflanzt wird. Bei ferneren Beben werden daher nicht die Vorläufer, wie das bei künstlichen und anderen nahen Beben der Fall ist, sondern die Hauptphase am ehesten den Einfluß der oberen Schichten der Erde, die den Geologen interessieren, zeigen. Die Seismogramme erlauben zunächst die Bestimmung der Geschwindigkeit, der Periode und der Größe der wahren Bodenbewegung. Arbeiten über Geschwindigkeit [1]) und Perioden [2]) zeigten bereits, daß große Unterschiede vorkommen. Von Intensitätsbestimmungen, die sich in der Seismometrie als besonders empfindliche Indikatoren erwiesen haben, war eine Bestätigung und weitere Aufklärung zu erwarten.

In den Berichten der Erdbebenstationen ist außer den Perioden (T) noch die Größe der wahren Bodenbewegung (A) angegeben, die zwar nicht allein, wie Tornquist [3]) anzunehmen scheint, aber mit dem ersteren Wert zusammen nach der Formel $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A$ die Größe der Intensität zahlenmäßig zu bestimmen ge-

1) Siehe u. a. Pechau Gerlands Beitr. 1914, Meißner, Gerlands Beitr. 1915, Tams, Centrbl. f. Min. etc. 1921, p. 44.

2) Wiechert, Über Erdbebenwellen I. Gött. Nachr. math.-phys. Kl. 1907, p. 52—59. Verf. zeigt, daß Eigenschwingungen d. festen Erdkruste und von Teilen derselben in ihnen ihren Ausdruck finden. Rösener, Gerlands Beitr. 1913, p, 204.

3) Tornquist, Zeitschr. d. Deutsch. Geol. 1912. B. p. 274.

stattet. Die von mir benutzten Intensitätswerte sind nach den Berichten der Stationen Königsberg i. Pr., Pulkowo bei St. Petersburg, Upsala, Breslau, Potsdam, Göttingen und Hamburg, von denen die meisten mit Wiechert'schen Horizontalpendeln ausgerüstet und in dem von mir herangezogenen Zeitraum 1912—14 gut bedient waren, nach obiger Formel errechnet. Die ersten drei Orte liegen im Gebiet des baltisch-russischen Schildes [1]). Ihr Untergrund ist seit dem Archaikum von keinen größeren tektonischen Bewegungen betroffen worden, also alt konsolidiert. Dagegen ist der Untergrund der übrigen Stationen sowohl von der variscischen, wie der jüngeren saxonischen Faltung ± stark betroffen worden. Beide Gebiete werden durch die bekannte Tornquist'sche Linie Schonen, Bornholm, Weichselknie, Lysa Gora getrennt. Ich stellte mir nun die Aufgabe, Intensitätsveränderungen, die die Bebenstrahlen beim Passieren dieser Linie erleiden würden, festzustellen.

Als Material dienten 24 Fernbeben von 6—12000 km Entfernung, deren Epizentrum hinreichend genau, bei den meisten auch makroseismisch festgelegt war. 17 dieser Beben kamen aus N bis O: Alaska, Aleuten, Japan bis Hinterindien (Asienbeben), 7 aus WNW bis WSW: Mexiko bis Peru (Amerikabeben). Als Vergleichsstation wurde Pulkowo gewählt, das sich wegen seines ungestörten Untergrundes durch die gleichmäßigsten Registrierungen auszeichnete. Wenn $I_{N(E)}$ die größte Intensität Pulkowos für die $N(E)$ Komponente eines Bebens, $J_{N(E)}$ die entsprechende der verglichenen Station ist, wurde nach der Formel $\sqrt{\frac{I_N^2+I_E^2}{J_N^2+J_E^2}}$ zunächst für jedes Beben der mittlere Quotient in Bezug auf Pulkowo (mQ) bestimmt, dann für alle Asien-, bezw. Amerikabeben das geometrische Mittel: $\sqrt[n]{mQ_{Am_1(As_1)} \cdot mQ_{Am_2(As_2)} \cdots mQ_{Am_n(As_n)}} = mQ_{Am(As)}$. $\frac{mQ_{As}}{mQ_{Am}}$ gibt dann unmittelbar an, um wieviel schwächer im Mittel die Asienbeben als die Amerikabeben für jede Station in Bezug auf Pulkowo verzeichnet werden. Die erhaltenen Werte sind für Königsberg 0,93, Upsala 0,74, Breslau 0,63, Potsdam 0,69, Göttingen 0,3, Hamburg 0,56 und zeigen, daß die Absorption keineswegs von dem relativen Entfernungsunterschied, wie man dies bei gleichmäßiger Absorption erwarten müßte, abhängig ist. Der Unterschied

1) Tornquist, Schr. d. phys. ök. Ges. Königsberg 1905 H. 1 u. Sitzungsber. d. Preuß. Ak. d. Wiss. 1911 p. 822. a. a. O.

zwischen Königsberg und Pulkowo ist gering und durch die relativ verschiedenen Entfernungen genügend erklärt. Bei Upsala ist trotz seiner näheren Entfernung der Einfluß der in der Ostsee verborgenen zwischen russischer Tafel und Fennoskandia verlaufenden Störungen[1]) deutlich zu erkennen: die Asienbeben müssen sie auf dem Wege nach Upsala, die Amerikabeben auf dem Wege nach Pulkowo passieren. Ähnlich dokumentieren sich die variscischen und saxonischen Störungen im Untergrunde von Norddeutschland: es ist nicht die Tornquist'sche Linie allein, die diese Wirkung hätte, sondern die Gesamtheit der Dislokationen, sonst dürften sich nicht so große Unterschiede zwischen Potsdam und Breslau einerseits, und Hamburg und Göttingen anderseits zeigen.

Der auffallend geringe Wert der letzten Station ist durch die wegen seiner Lokaltektonik ungünstige Disposition für Ostbeben bedingt. Um einen zahlenmäßigen Wert für diesen Einfluß der Lokaltektonik zu finden, wurde der höchste und niedrigste *mQ* Wert für jede Station durcheinander dividiert. Die erhaltene Zahl (Variabilitätszahl) zeigt, um wieviel die Intensität einer Station von der für Pulkowo gemessenen im Maximum abweichen kann. Die Zahlen sind für Königsberg 6.2, Upsala 6,8, Breslau 7,5, Potsdam 10.1, Göttingen 65, Hamburg 5.5. Der auffallend hohe Wert für Göttingen wird durch seine ausgeprägte Schollentektonik erklärt. Beben aus O bis SO kommen sehr schwach an, weil die Station auf einer keilförmigen, nach OSO zugespitzten Muschelkalkscholle liegt, die auf beiden Seiten von Keupergräben begrenzt ist. Andrerseits können Verwerfungen wohl durch Reflexionen und dadurch bedingte Interferenzen auch wieder verstärkend wirken. Die übrigen Stationen ordnen sich nach der Häufigkeit und Tiefenlage der in ihrem Untergrund zu erwartenden Störungen. Nur in Hamburg ist die Wirkung der großen dort anzunehmenden Dislokationen[2]) nicht deutlich, wohl deshalb, weil bis in große Tiefen in der Hauptsache nur plastische Gesteine, in denen keine offnen Spalten usw. vorkommen können, vorhanden sind.

Neben der Wirkung der Lokaltektonik, also der horizontalen Verbreitung der Schichten in der Nähe der Station, ist natürlich die Beschaffenheit und Verteilung der Schichten in der Vertikalen von Wichtigkeit. Über den Einfluß wird ein Mittelwert, der alle vorkommenden Richtungen möglichst gleichmäßig berücksichtigt.

---

1) Högbom, Fennoskandia Reg. Geol. 13. H. 1913 p. 2 u. 159.

2) Zechstein bei Langenfelde! Siehe Wolff, Erl. z. Bl. Hamburg u. a.

Auskunft geben. Ich erhielt ihn in roher Annäherung, indem ich einen Mittelwert aus allen mQ herstellte, wobei die Größe des Erd-Sektors aus dem die Amerika- bzw. Asienbeben (4 : 7) kommen, entsprechend in Rechnung gestellt wurde:

$$\sqrt[11]{m\,Q_{As_1} \ldots m\,Q_{As_7} \,.\, m\,Q_{Am_1} \ldots m\,Q_{Am_4}}.$$

Den erhaltenen Wert nenne ich Orts-Faktor, er gibt die Zahl an, mit der im Mittel die Intensität einer Station multipliziert werden muß, um dem der Normalstation (Pulkowo) gleichzukommen. Er ist für Königsberg 1,09, Upsala 1,66, Breslau 2,2, Potsdam 1,19, Göttingen 1,45 (bei Berücksichtigung der extrem schwachen Ostbeben 1,65) und Hamburg 0,7. Danach sind ± plastische feinkörnige Gesteine der Reproduktion der Bodenbewegung am günstigsten (Hamburg [1]): Geschiebemergel, darunter sehr mächtige feinkörnige diluviale Sande, dann tertiäre Feinsande und Tone zusammen sicher über 300, wahrscheinlich über 1000 m, Pulkowo [2]): 150—200 m plastische kambrische Tone auf Archaikum, Königsberg — Gr. Raum [3]): ca. 70 m Geschiebemergel über auch nicht sehr festen Kreidemergeln). Der ca. 50 m mächtige Spatsand über Tertiär im Untergrund der Potsdamer Station [4]) erscheint wegen seines lockeren Gefüges weniger günstig, ebenso dürfte die ungünstige Zahl Breslaus [5]) auf die dort unter dem geringmächtigen Geschiebemergel vorhandene Sand- und Kieslage über dem sonst günstigeren Tertiär, die isolierend wirkt, vielleicht auch auf die verhältnismäßig geringe Mächtigkeit und vorwiegend sandige Beschaffenheit der über dem alten Gebirge liegenden Sedimente, zurückzuführen sein. Auch der zerklüftete Trochitenkalk der Göttinger [6]) Station und die kristallinen Gesteine der mittelschwedischen Bruchzone im Untergrunde Upsalas [7]) sind weniger günstig: im plastischen feinkörnigen Gestein wird wohl die Bewegung unmittelbar leicht von einem Bodenteilchen zum anderen übertragen, in lockereren Gesteinen sind die größeren mit Wasser oder Luft erfüllten Hohlräume, bei festen Gesteinen die Zerklüftung nahe der Oberfläche der Übertragung hinderlich.

Außer den Fernbeben wurden in ähnlicher Weise 30 nähere Beben untersucht. Bei ihnen sind die Unterschiede wegen der

1) Wolff, Erl. z. Bl. Wandsbeck, und Schütt, Gerlands Beitr. 1899. Wolff, Jahrb. d. K. Pr. Landesanst. 1915, II. p. 228.

2) Högbom, l. c. p. 161.

3) Hess v. Wichdorff, Erl. zu Bl. Powunden.

4) Laufer, Erl. z. Bl. Potsdam, p. 7.

5) Tietze, Jahrb. d. K. Pr. Landesanst. 1910 p. 258. Jahrb. d. K. Pr. Landesanst. 1911 p. 201 u. 1915 p. 498. Barsch u. Tietze, Bl. Kattern u. Schmolz.

6) v. Koenen, Bl. Göttingen.

7) Högbom, l. c. p. 152.

relativ geringeren Entfernungsdifferenzen und der größeren Verschiedenheit der durchlaufenen Wege erheblich größer und erlauben nur für nahe beieinanderliegende Bebenherde die Aufstellung von Mittelwerten. Der Einfluß der geotektonischen Verhältnisse auf dem Weg Herd-Station ist sehr deutlich [z. B. spielen hier, wie die Perioden zeigen, (s. Wiechert über Erdbebenwellen I) Eigenschwingungen von Teilen der Erdkruste eine große Rolle]. Es bestätigte sich, daß junge Faltengebirge quer zum Streichen der Fortpflanzung der Intensität sehr hinderlich sind. So werden die Focsanibeben (Rumänien) weitaus am kräftigsten in Pulkowo (die Bebenstrahlen berühren die Karpathen gar nicht) noch kräftig in Königsberg und Upsala (die Strahlen tangieren die Karpathen), bei den übrigen Stationen gar nicht oder viel schwächer (die Strahlen müssen die Karpathen schneiden) verzeichnet. Auch Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Perioden verändern sich entsprechend, d. h. letztere werden größer und erstere geringer. Weiter zeigte sich, daß der von v. Lozinski[1]) festgestellte Unterschied im seismischen Verhalten der Ost- und Westkarpathen auch seismometrisch zum Ausdruck kommt. Ein ungarisches Beben wird in Breslau stärker als in Lemberg, in Potsdam stärker als in Königsberg aufgezeichnet. Wie mir weitere Beobachtungen an 6 transkaukasischen und kleinasiatischen, 3 Dardanellen- und 5 Mittelmeerbeben wahrscheinlich machten, möchte ich hierfür weniger den sudetischen Untergrund der Westkarpathen als die tektonisch relativ gehobene Lage dieses Teiles des Karpathenbogens verantwortlich machen. In solchen Gebirgsteilen liegen die gut leitenden kristallinen Gesteine näher an der Erdoberfläche als in relativ gesunkenen. Als ganz besonders absorbierend erwiesen sich darum z. B. die im Schwarzen Meer versunkenen Teile des kimmerischen Gebirges, des Kaukasus und Balkans, so daß Strahlen, die den zentralen Kaukasus oder den Balkan und die Karpathen queren mußten, verhältnismäßig viel kräftiger ankamen, als solche, die nur das Schwarze Meer passieren mußten und dann die der Fortpflanzung außerordentlich günstige (s. Rumänienbeben) russische Tafel durcheilen konnten.

Sonst ist sowohl in älteren wie in jungen Gebirgen im Sinne v. Lozinski's und anderer die Streichrichtung die für die Fortpflanzung der Intensität bevorzugte. So macht sich die sudetisch-herzynische Richtung im Untergrund Norddeutschlands deutlich bemerkbar: Island- wie Dardanellenbeben werden relativ am kräf-

1) v. Lozinski, Gerl. Beitr. 1913 Kl. Mitt. p. 16.

tigsten in Potsdam und Breslau aufgezeichnet, zentralasiatische (Turkistan und Pamir) Beben hingegen durchweg am besten in Königsberg. Hier wirkt der Ural für Pulkowo und Upsala als Schirm, die saxonischen Störungen für die übrigen norddeutschen Stationen absorbierend.

Zusammenfassend konnte also festgestellt werden, daß die auf einer Erdbebenstation registrierte Intensität von Apparat und Auswertungsfehlern sowie Interferenzen abgesehen, abhängig ist:

Lokale indirekte Intensitätsbeeinflussung.

1. Vom Ortsfaktor (Beschaffenheit und Verteilung der Gesteine in der Vertikalen).
2. Von der Lokaltektonik (Verteilung der Gesteine in der Horizontalen, Verwerfungen etc.).

Regionale direkte Intensitätsbeeinflussung.

3. Von den geotektonischen Verhältnissen auf dem Weg Herd-Station.
4. Von den tektonischen Verhältnissen am Herd und seiner Tiefe.
5. Von der Epizentralentfernung (Wirkung der normalen Absorption).

Es wurde gezeigt, wie man rechnerisch die Wirkung von Punkt 1—3 annähernd von einander trennen und feststellen kann. Für Punkt 4 lag mir nicht genügend Material vor, doch möchte ich z. B. das Verhalten solcher Seismogramme, bei denen auf kräftige Vorläufer eine minimale Hauptphase folgt, auf die absorbierende Wirkung von nahe dem Herde gelegenen Störungen zurückführen. Punkt 5[1]) ist vorläufig nicht näher festzustellen, da der Einfluß der Tektonik überwiegt und erst geklärt sein muß.

Der weitere Ausbau solcher seismometrisch-geologischer Methoden verspricht sowohl dem Geophysiker wie dem Geologen großen Nutzen. Der Geophysiker wird dem Problem elastischer Bodenwellen unter Berücksichtigung geologischer Einzelheiten näher kommen, der Geologe wird über für ihn sonst immer verborgene, sei es vom Meere bedeckte, oder von jungen Bildungen zugeschüttete Gebiete Auskunft bekommen und auch theoretisch wichtige Begriffe wie Masse etc. rein physikalisch genauer fassen können. Schließlich sind, wie Mintrops[2]) Versuche mit künstlichen Beben zeigen, diese Dinge auch von hohem praktischen Wert.

---

1) Vergleiche dagegen die von Pechau, Meissner, Angenheister etc. ermittelten Werte f. $Mrep_I$, die auf gleichmäßigeres Verhalten tieferer Teile d. Erdkruste hinweisen.

2) Mintrop's Vortrag auf d. Vers. d. Deutsch. Geol. 1920.

Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.

(Aus einem Briefe an F. Klein.)

Von

H. Weyl in Zürich.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Januar 1921.

I. Der Aufbau der reinen Infinitesimalgeometrie, wie ich ihn am folgerichtigsten in der 3. und 4. Aufl. meines Buches „Raum Zeit Materie“ geschildert habe, vollzieht sich natürlicherweise in den drei Stockwerken, welche durch die Schlagworte *stetiger Zusammenhang*, *affiner Zusammenhang*, *Metrik* gekennzeichnet sind [1]). Die *projektive* und die *konforme* Geometrie entspringen durch Abstraktion aus der affinen, bezw. der metrischen. Charakteristisch für die *konforme Beschaffenheit* eines metrischen Raumes ist der zu jeder Stelle gehörige infinitesimale Kegel der Nullrichtungen

(1) $$g_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0.$$

Ändert man die Metrik des Raumes in solcher Weise, daß an jeder Stelle dieser Kegel erhalten bleibt, so bleibt die konforme Beschaffenheit erhalten; eine solche Änderung kann allgemein so vorgenommen werden, daß die quadratische Fundamentalform $g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ festgehalten, die lineare aber irgendwie abgeändert wird. — Charakteristisch für die *projektive Beschaffenheit* eines affin zusammenhängenden Raums ist die Parallelverschiebung, welche eine willkürliche *Richtung* an einer willkürlichen Stelle P erfährt, wenn P in dieser Richtung selber infinitesimal verschoben wird. Ändert man den affinen Zusammenhang in solcher Weise, daß diese Parallelverschiebung von Richtungen in sich selber, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die *geodätischen Linien* erhalten bleiben, so wird die projektive Beschaffenheit der Mannigfaltigkeit nicht angegriffen. Sind Γ^r_{ik} die Komponenten des affinen Zusammenhangs und $[\Gamma^r_{ik}]$ deren Änderung, so ist die Bedingung dafür, daß durch den Änderungsprozeß die projektive Beschaffenheit nicht affiziert wird, diese, daß für beliebige Größen ξ^i

1) In § 18 der 4. Aufl. habe ich das Raumproblem formuliert, das mir als die eigentliche Basis dieses Baus erscheint; seine Lösung ist mir inzwischen in dem dort vermuteten Sinne gelungen. [Zusatz bei der Korrektur, April 1921.]

(2) $[\Gamma^r_{ik}]\,\xi^i\,\xi^k$ proportional zu ξ^r

sein muß. Eine einfache algebraische Betrachtung zeigt, daß das dann und nur dann der Fall ist, wenn

(3p) $[\Gamma^r_{ik}]$ die Form hat $\delta^r_i\,\psi_k + \delta^r_k\,\psi_i$

(die ψ_i sind dabei willkürlich). Man vergleiche damit die Formel für die Änderung des affinen Zusammenhangs, welche gilt, wenn die Metrik eines metrischen Raumes unter Erhaltung seiner konformen Beschaffenheit abgeändert wird:

(3k) $$[\Gamma^r_{ik}] = \tfrac{1}{2}\,(\delta^r_i\,\varphi_k + \delta^r_k\,\varphi_i - g_{ik}\,\varphi^r).$$

In der Relativitätstheorie haben projektive und konforme Beschaffenheit eine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Die erstere, die Beharrungstendenz der Weltrichtung eines sich bewegenden materiellen Teilchens, welche ihm, wenn es in bestimmter Weltrichtung losgelassen ist, eine bestimmte „natürliche“ Bewegung aufnötigt, ist jene Einheit von Trägheit und Gravitation, welche Einstein an Stelle beider setzte, für die es aber bislang an einem suggestiven Namen mangelt. Der infinitesimale Kegel (1) aber vollzieht in der Nachbarschaft eines Weltpunktes die Scheidung von Vergangenheit und Zukunft; die konforme Beschaffenheit ist der Wirkungszusammenhang der Welt, durch den bestimmt wird, welche Weltpunkte miteinander in möglicher kausaler Verbindung stehen. Es ist darum eine auch für die Physik bedeutungsvolle Tatsache, die in folgendem Satz zum Ausdruck kommt:

Satz 1. Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

Denn liegen zwei Maßbestimmungen im selben Raume vor, für welche die quadratischen Fundamentalformen übereinstimmen, während die Koeffizienten der beiden linearen Fundamentalformen sich um φ_i unterscheiden, so gilt für den Unterschied der beiden ihnen entsprechenden, affinen Zusammenhänge die Gleichung (3k). Soll bei dem Übergang von der einen zur andern Metrik auch die projektive Beschaffenheit erhalten bleiben, so muß (2) gelten, und das liefert hier

$$(g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k)\,\varphi^r \text{ proportional zu } \xi^r.$$

Man braucht nur in einem Punkte zwei verschiedene Richtungen zu wählen, für welche $g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k$ nicht verschwindet, um hieraus auf $\varphi_r = 0$ zu schließen. — Es geht aus diesem Satz hervor, daß allein durch die Beobachtung der „natürlichen“ Bewegung materieller Teilchen und der Wirkungs-, insbesondere der Licht-Ausbreitung

die Weltmetrik festgelegt werden kann; Maßstäbe und Uhren sind nicht dazu erforderlich.

II. Wir fassen jetzt den Krümmungstensor

$$F^{\alpha}_{ikl} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x_l}\right) + (\Gamma^{\alpha}_{kr}\Gamma^{r}_{il} - \Gamma^{\alpha}_{lr}\Gamma^{r}_{ik})$$

ins Auge und seine Verjüngung $F^{\alpha}_{i\alpha k} = F_{ik}$. Im metrischen Raum kann man noch durch abermalige Verjüngung den Tensor $g_{ik}F$ bilden mit $F = F^{i}_{i}$. Wie ändert sich der Krümmungstensor, wenn wir den affinen Zusammenhang bezw. die Metrik abändern, ohne jedoch die projektive bezw. konforme Beschaffenheit der Mannigfaltigkeit anzutasten? Im ersten Fall ergibt eine kurze Rechnung auf Grund von (3p) das folgende Resultat: Setzt man

(4p) $$\Psi_{ik} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \Gamma^{r}_{ik}\psi_r\right) - \psi_i\psi_k$$

und für ein beliebiges Zahlsystem u_{ik}

(5p) $$\hat{u}^{\alpha}_{ikl} = \delta^{\alpha}_{i}(u_{kl} - u_{lk}) + (\delta^{\alpha}_{k}u_{il} - \delta^{\alpha}_{l}u_{ik}),$$

so ist die Krümmungsänderung $[F^{\alpha}_{ikl}]$ bestimmt durch

$$[F^{\alpha}_{ikl}] + \hat{\Psi}^{\alpha}_{ikl} = 0.$$

Durch Verjüngung folgt daraus

$$[F_{ik}] + (n\Psi_{ik} - \Psi_{ki}) = 0.$$

Definiert man also einen Tensor G_{ik} durch die Gleichung

(6p) $$nG_{ik} - G_{ki} = F_{ik},$$

so erfährt der Tensor 4. Stufe

(7p) $$F^{\alpha}_{ikl} - \hat{G}^{\alpha}_{ikl} = \text{proj. } F^{\alpha}_{ikl}$$

bei unserm Prozeß keine Änderung: er ist nur von der projektiven Beschaffenheit der Mannigfaltigkeit abhängig und daher als *Projektivkrümmung* zu bezeichnen. Die Gleichung (6p) läßt sich, wenn wir von dem trivialen Fall $n = 1$ absehen, stets auflösen und liefert

$$(n-1)(n+1)\,G_{ik} = nF_{ik} + F_{ki}.$$

Für $n = 2$ ist die Projektivkrümmung identisch Null, erst von $n = 3$ ab spielt sie eine Rolle.

Die *Konform-Krümmung* habe ich bereits früher angegeben[1]). Man hat zu bilden

1) Mathem. Zeitschrift Bd. 2 (1918), S. 404.

(4k) $$\Phi_{ik} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \Gamma^r_{ik}\,\varphi_r\right) - \tfrac{1}{2}\,\varphi_i\,\varphi_k + \tfrac{1}{4}\,g_{ik}\,(\varphi_r\,\varphi^r)$$

und allgemein für ein Zahlsystem u_{ik} zu setzen

(5k) $$\tilde{u}_{iklm} = \tfrac{1}{2}\,(g_{il}\,u_{km} + g_{km}\,u_{il} - g_{im}\,u_{\;l} - g_{kl}\,u_{im}), \quad u^i_i = u;$$

dann ist zufolge (3k)

$$[F^\alpha_{ikl}] + \tilde{\Phi}^\alpha_{ikl} = 0$$

(der obere Index α geht den unteren voraus). Verjüngung liefert

$$[F_{ik}] + \tfrac{1}{2}\left\{(n-2)\,\Phi_{ik} + g_{ik}\,\Phi\right\} = 0.$$

Definiert man also einen Tensor H_{ik} durch die Gleichung

(6k) $$(n-2)\,H_{ik} + H g_{ik} = 2 F_{ik},$$

so ist

(7k) $$\text{konf. } F^\alpha_{ikl} = F^\alpha_{ikl} - \check{H}^\alpha_{ikl}$$

die Konformkrümmung. Für $n > 2$ läßt sich (6k) auflösen:

$$(n-1)\,H = F, \quad (n-1)(n-2)\,H_{ik} = 2\,(n-1)\,F_{ik} - g_{ik}\,F.$$

Aber auch noch für $n = 3$ verschwindet die Konformkrümmung identisch, erst von $n = 4$ ab spielt sie eine Rolle.

Satz 2. Neben der (affinen) Totalkrümmung F^α_{ikl} *gibt es auch eine projektive und eine konforme Krümmung, die sich nach den Gleichungen* (5p), (6p), (7p), *bezw.* (5k), (6k), (7k) *aus der Totalkrümmung bestimmen. Die Totalkrümmung spielt von* $n = 2$ *ab eine Rolle, die projektive von* $n = 3$, *die konforme erst von* $n = 4$ *ab.*

III. Das Wort „*eben*" gebrauche ich im Sinne von „Euklidisch". Ein affin zusammenhängender Raum ist eben, wenn bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems die Komponenten des affinen Zusammenhangs identisch verschwinden. Ein metrischer Raum ist dann und nur dann eben, wenn bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems und der Eichung die Koeffizienten der quadratischen Fundamentalform Konstante sind und die lineare verschwindet. Nur der zweite Teil dieser Behauptung bedarf eines Beweises. Verschwinden die Komponenten des affinen Zusammenhangs, so folgt aus den Gleichungen, welche die beiden metrischen Fundamentalformen $g_{ik}\,dx_i\,dx_k$, $\varphi_i\,dx_i$ mit dem affinen Zusammenhang verknüpfen:

(8) $$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\,\varphi_r = 0.$$

Daraus ergibt sich sogleich

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_r} = 0.$$

Darum kann man die Eichung so wählen, daß $d\varphi = \varphi_i dx_i$ verschwindet, und dann folgt aus (8): $g_{ik} =$ const.

Satz 3. Das Verschwinden der Krümmung ist nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung dafür, daß eine Mannigfaltigkeit eben ist.

Ich deute den Beweis dieses längst bekannten Satzes hier noch einmal kurz an, weil er nicht nur Grundlage des folgenden ist, sondern auch typisch für die immer wieder anzustellenden Integrabilitäts-Überlegungen. Die Voraussetzung hat zur Folge, daß sich ein Vektor unabhängig vom Wege überall hin durch Parallelverschiebung übertragen läßt, d. h. daß die Gleichungen

$$\Xi^i_k \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} - \Gamma^i_{kr} \xi^r = 0 \tag{9}$$

eine Lösung ξ^i besitzen, welche beliebig vorgegebenen Anfangswerten ξ^i_0 im Nullpunkt entspricht. Setzen wir allgemein für ein Tensorfeld u^i_k, bezw. u_{ik}

$$u^i_{k|l-l|k} = \left(\frac{\partial u^i_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u^i_l}{\partial x_k}\right) + (\Gamma^i_{lr} u^r_k - \Gamma^i_{kr} u^r_l),$$

$$u_{i,k|l-l|k} = \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial u_{il}}{\partial x_k}\right) + (\Gamma^r_{ik} u_{rl} - \Gamma^r_{il} u_{rk}),$$

so gilt bei verschwindender Krümmung, welches auch die Funktionen ξ^i sein mögen,

$$\Xi^i_{k|l-l|k} = 0. \tag{10}$$

Man kann nun den Gleichungen (9) nach den Existenzsätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen unter allen Umständen so genügen, daß (9) identisch in $x_1 x_2 \ldots x_k$ gilt, sofern man die übrigen Variablen $= 0$ setzt. Auf Grund der Identitäten (10) zeigt man dann leicht, daß sie damit schon von selber identisch in allen Variablen erfüllt sind. Um das „lineare" Koordinatensystem y_i zu bekommen, hat man jetzt ähnlich die Gleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \xi^i_{(k)}(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

zu behandeln, deren rechte Seiten $\xi^i_{(1)}, \xi^i_{(2)}, \ldots \xi^i_{(n)}$ diejenigen Lösungen von (9) sind, welche bezw. den Anfangswerten

$$\begin{array}{c} 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0; \\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0; \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1 \end{array}$$

entsprechen.

Es ist klar, wann eine Mannigfaltigkeit *im projektiven*, wann *im konformen Sinne* als *eben* zu gelten hat. Eine notwendige Bedingung, an welche dieser Charakter gebunden ist, ist das Verschwinden der projektiven, bezw. der konformen Krümmung. Es muß also im einen Fall einen Tensor G_{ik} geben von der Art, daß

(Ip) $F^\alpha_{ikl} = \hat{G}^\alpha_{ikl}$, d. i. $= \delta^\alpha_i (G_{kl} - G_{lk}) + (\delta^\alpha_k G_{il} - \delta^\alpha_l G_{ik})$

ist, im andern Fall einen Tensor H_{ik}, für den

(Ik) $F^\alpha_{ikl} = H^\alpha_{ikl}$, d. i. $= \frac{1}{2}(\delta^\alpha_k H_{il} - \delta^\alpha_l H_{ik}) + \frac{1}{2}(H^\alpha_k g_{il} - H^\alpha_l g_{ik})$

wird. Die vorzunehmende Abänderung des affinen Zusammenhangs bezw. der linearen metrischen Fundamentalform, welche die Mannigfaltigkeit in eine ebene verwandelt, bestimmt sich dann aus den Gleichungen

(IIp) $\Psi_{ik} = G_{ik}$, bezw. (IIk) $\Phi_{ik} = H_{ik}$.

Die am bequemsten in einem geodätischen Koordinatensystem durchzuführende Rechnung (in ihm verschwinden an der betrachteten Stelle alle Γ) liefert sofort

(11) $$\Psi_{i,\,k|l - l|k} + (\hat{\Psi}^\alpha_{ikl} - F^\alpha_{ikl})\,\varphi_\alpha = 0,$$

also wegen (IIp) und (Ip)

$$\Psi_{i,\,k|l - l|k} = 0.$$

Infolgedessen muß auch G_{ik} derselben Bedingung genügen:

(IIIp) $$G_{i,\,k|l - l|k} = 0.$$

Auf genau die gleiche Weise findet man im konformen Fall

(IIIk) $$H_{i,\,k|l - l|k} = 0.$$

Die Bedingungen (Ip), (IIIp) sind aber nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür, daß eine Mannigfaltigkeit projektiv-eben ist. Denn unter diesen Umständen gestatten die Gleichungen (IIp) eine Lösung [übrigens eine solche, bei welcher die ψ_i beliebig vorgegebene Anfangswerte annehmen][1]. In der Tat, wenn die Integrabilitätsbedingung (IIIp) erfüllt ist, lehrt die Gleichung (11), welche für beliebige ψ_i gilt, daß die Differenz $D_{ik} = \Psi_{ik} - G_{ik}$ der Identität

$$D_{i,\,k|l - l|k} + \hat{D}^\alpha_{ikl}\,\psi_\alpha = 0$$

genügt oder

(12) $${}^*D_{i,\,k|l - l|k} = 0,$$

1) Diese Willkür entspricht der Freiheit, den ebenen Raum projektiv auf sich selber durch eine beliebige Kollineation abzubilden; im konformen Fall treten anstelle der Kollineationen die Kugelverwandtschaften (Liouvillescher Satz).

worin die linke Seite den zu $D_{i,kl-lk}$ analogen, aber mittels des abgeänderten affinen Zusammenhangs zu bildenden Ausdruck bedeutet. Man kann nun (IIp) zunächst so erfüllen, daß diese Gleichung identisch in $x_1\, x_2\, \ldots\, x_k$ besteht bei Nullsetzen der übrigen Variablen. Die Identitäten (12) lehren dann, daß sie ohne Einschränkung bestehen. Also ist für den abgeänderten affinen Zusammenhang die Totalkrümmung 0 und nach Satz 3 die Mannigfaltigkeit eine ebene. Auch übersieht man klar die Schritte, die man zu tun hat, um in der Mannigfaltigkeit jene homogenen Variablen zu bestimmen, in denen die Gleichungen jeder Geodätischen linear ausfallen. — Das konforme Problem ist ganz analog.

IV. Herr Schouten[1]) hat die merkwürdige Entdeckung gemacht, daß für $n > 3$ die Integrabilitätsbedingung (IIIk) eine Folge von (Ik) ist. Diese Untersuchung von Herrn Schouten war für mich der Anlaß, den projektiven und den konformen Standpunkt, den ich in meiner bisherigen Darstellung der Infinitesimalgeometrie nur gestreift hatte, einmal ernstlich ins Auge zu fassen. Es gilt das Analogon zu dem Schoutenschen Satz: Für $n > 2$ ist die Integrabilitätsbedingung (IIIp) eine Folge von (Ip). Wir gewinnen damit diese Resultate:

Satz 4. Unter den affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten sind die p r o j e k t i v - ebenen charakterisiert: im Falle $n = 2$ durch das Bestehen der Gleichungen (IIIp)*; im Falle $n \geqq 3$ durch das Verschwinden der projektiven Krümmung. Notwendig und hinreichend dafür, daß sich ein metrischer Raum k o n f o r m auf einen ebenen abbilden läßt, ist: für $n = 3$ das Bestehen der Gleichungen* (IIIk) (Cotton); *wenn $n \geqq 4$, das Verschwinden der Konformkrümmung* (Schouten).

Ich gebe die Rechnungen kurz an, die zu diesen Sätzen führen, wobei ich mich wiederum der Bequemlichkeit halber eines geodätischen Koordinatensystems bediene. Da G_{ik} im wesentlichen mit F_{ik} übereinstimmt, berechnen wir zunächst

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}.$$

Da F_{ik} bis auf einen Ausdruck, der die Komponenten des affinen Zusammenhangs *quadratisch* enthält,

$$= \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} \text{ ist, } \gamma_i = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha},$$

kommt

1) Erscheint demnächst in der Mathem. Zeitschrift.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x_l \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{il}}{\partial x_k \partial x_\alpha} \tag{13}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{il}}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial F^\alpha_{ikl}}{\partial x_\alpha}.$$

Darin setze ich rechts den Ausdruck (I p) für F^α_{ikl} ein und schreibe noch zur Abkürzung

$$G_{ik} - G_{ki} = \gamma_{ik}$$

— wofür sich aus (6 p)

$$(n-1)\gamma_{ik} = F_{ik} - F_{ki} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} \tag{14}$$

ergibt —:

$$\frac{\partial F^\alpha_{ikl}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial G_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial G_{ik}}{\partial x_l}\right);$$

links aber ersetze ich F_{ik} nach (6 p) durch

$$nG_{ik} - G_{ki} = (n-1)\,G_{ik} + \gamma_{ik}.$$

Das Resultat ist

$$(n-1)\left(\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial G_{il}}{d x_k}\right) + \left(\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \gamma_{il}}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial G_{il}}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_i},$$

oder

$$(n-2)\left(\frac{\partial G_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial G_{il}}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_{li}}{\partial x_k}\right) = 0. \tag{15 p}$$

Hier ist aber die zweite Klammer $= 0$. Denn der Ausdruck (14) ist in einem beliebigen Koordinatensystem gültig, unter Vernachlässigung eines Terms, der die Komponenten des affinen Zusammenhangs *quadratisch* enthält; also ist auch nach der Differentiation in einem geodätischen Koordinatensystem

$$(n-1)\frac{\partial \gamma_{ik}}{d x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k}\right)$$

ist und daher

$$(n-1)\left(\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_{li}}{\partial x_k}\right) = 0. \tag{16 p}$$

So ergibt sich für $n > 2$ das gewünschte Resultat.

Im konformen Fall sehen die analogen Rechnungen so aus. Durch die entsprechenden Substitutionen findet man zunächst anstelle von (15 p):

$$(n-3)\left(\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial H_{il}}{\partial x_k}\right) + \left\{g_{ik}\left(\frac{\partial H}{\partial x_l} - \frac{\partial H^\alpha_l}{\partial x_\alpha}\right) - g_{il}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{\partial H^\alpha_k}{\partial x_\alpha}\right)\right\} = 0. \tag{15 k}$$

Der aus der Gravitationstheorie bekannte „Erhaltungssatz“

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2\frac{\partial F^\alpha_i}{\partial x_\alpha}$$

darf hier angewendet werden, da unser Raum zufolge (I k) gewiß ein Riemannscher ist; denn aus (I k) geht hervor, daß die „Streckenkrümmung“ [1]) $F^{\alpha}_{\alpha kl}$ verschwindet. Im übrigen ergibt sich diese Formel auch aus (13) sogleich durch Verjüngung unter Berücksichtigung des Umstandes, daß hier zufolge (I k) $F_{\alpha ikl}$ nicht nur in kl, sondern auch in αi schiefsymmetrisch ist. Sie liefert

$$(n-1)\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2\frac{\partial F^{\alpha}_{i}}{\partial x_{\alpha}} = (n-2)\frac{\partial H^{\alpha}_{i}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial H}{\partial x_i},$$

also

(16 k) $$(n-2)\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{\partial H^{\alpha}_{i}}{\partial x_{\alpha}}\right) = 0.$$

Damit sind wir am Ziel.

V. Nach der Betrachtung der ebenen Räume wird man sich den nächst einfachen, den „kugelförmigen“, zuwenden. Ist $E(x) = \sum_{i=1}^{n} \pm x_i^2$ die quadratische Einheitsform vom Trägheitsindex q (die ersten $n-q$ Vorzeichen sind $+$, die letzten q hingegen $-$), λ irgend eine Zahl, so nenne ich die durch die Gleichung

$$x_0^2 + \lambda E(x) = 1$$

im $(n+1)$-dimensionalen ebenen Raum mit der metrischen Fundamentalform

$$\frac{dx_0^2}{\lambda} + E(dx)$$

dargestellte n-dimensionale Mannigfaltigkeit eine *Kugel*, gleichgültig ob λ positiv oder negativ ist und welchen Wert der Trägheitsindex q auch besitzen mag. Drücken wir in der metrischen Fundamentalform x_0 durch $x_1 x_2 \ldots x_n$ aus, so ist unter einer Kugel (vom Trägheitsindex q und der Krümmung λ) also eine n-dimensionale metrische Mannigfaltigkeit zu verstehen, für welche bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems die quadratische Fundamentalform

$$= E(dx) + \frac{\lambda E^2(x, dx)}{1 - \lambda E(x)}$$

ist, die lineare aber verschwindet; die Koordinaten variieren in einem Bereich, in welchem $1 - \lambda E(x) > 0$. Man sieht, eine Fallunterscheidung $\lambda = 0$ oder $\lambda \neq 0$ — die ich im Bereich einer

[1]) Raum Zeit Materie, 4. Aufl., S. 114. Es ist $F^{\alpha}_{\alpha ik}\, dx_i\, \delta x_k$ die relative Zunahme, welche das Volumen eines unendlich kleinen „Kompaßkörpers“ erfährt, wenn er um das von den Linienelementen dx, δx aufgespannte Flächenelement herumgeführt wird.

willkürlichen reellen Größe λ für ganz unberechtigt halte — ist hier nicht erforderlich. Für die Kugel ist

$$F^{\alpha}_{ikl} = \lambda(\delta^{\alpha}_{k} g_{il} - \delta^{\alpha}_{i} g_{ik}). \tag{17}$$

Ein metrischer Raum R, welcher einer solchen Gleichung genügt, ist als ein Raum von *skalarer Krümmung* zu bezeichnen. Die Krümmung λ selber ist ein Skalar vom Eichgewichte -1; die Forderung $\lambda =$ const. hat also keinen von der Eichung unabhängigen Sinn. Der invariante Gradient von λ ist vielmehr, wenn $\varphi_i\, dx_i$ die lineare Fundamentalform von R ist, gegeben durch

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - \lambda \varphi_i. \tag{18}$$

Für die Kugel ist er identisch 0. — Wir stellen die Frage: wie kann man auf invariante Weise die Kugel unter den metrischen Räumen (vom gleichen Trägheitsindex q) in metrischer, affiner, projektiver und konformer Hinsicht charakterisieren?

Projektiv und *konform* sind die Kugeln identisch mit den ebenen Mannigfaltigkeiten. Vermöge

$$x_i = \frac{y_i}{\sqrt{1+\lambda E(y)}}, \text{ bezw. } x_i = \frac{y_i}{1-\lambda E(y)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19 p, k}$$

wird die Kugel projektiv, bezw. konform auf den ebenen Raum mit der metrischen Fundamentalform $E(dy)$ abgebildet. Hier ist somit alles durch Satz 4 erledigt. Die *affine* Frage wird auf die metrische zurückgeführt durch den

Satz 5: Eine metrische Mannigfaltigkeit, die sich affintreu auf eine Kugel abbilden läßt, stimmt mit ihr auch in metrischer Hinsicht überein.

Da die Mannigfaltigkeit denselben affinen Zusammenhang, also auch dieselbe Krümmung F^{α}_{ikl} haben soll wie die Kugel, ist ihre Streckenkrümmung $F^{\alpha}_{\alpha ik} = 0$. Sie ist demnach ein Riemannscher Raum, wir können ihre lineare Fundamentalform von vornherein $= 0$ nehmen. Weiterhin muß ich nun doch die Fälle $\lambda = 0$, bezw. $\lambda \neq 0$ unterscheiden. Im ersten ergibt sich sofort $g^{*}_{ik} =$ const. (die gesternten Größen beziehen sich auf die zu untersuchende Mannigfaltigkeit, die ungesternten auf die Kugel), und es bedarf im allgemeinen, nachdem die affintreue Abbildung nach Voraussetzung schon bewerkstelligt ist, noch einer zusätzlichen linearen Transformation, um zu erzielen, daß $g^{*}_{ik}\, dx_i\, dx_k = E(dx)$ wird. Im zweiten Fall aber ist die affintreue Abbildung ohne weiteres auch eine metrisch treue. Das erkennt man so: Nach Voraussetzung ist der Tensor

(20) $$g^*_{ik\alpha} \equiv \frac{\partial g^*_{ik}}{\partial x_\alpha} - \Gamma^r_{\alpha k} g^*_{ir} - \Gamma^r_{\alpha i} g^*_{kr} = 0.$$

Bildet man jenen Tensor, der in einem geodätischen Koordinatensystem den Ausdruck hat

$$\frac{\partial g^*_{ik,\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g^*_{ik,\beta}}{\partial x_\alpha},$$

so liefert (20), wie man im geodätischen Koordinatensystem ohne weiteres überblickt, die Beziehung

$$g^*_{ir} F^r_{k\alpha\beta} + g^*_{kr} F^r_{i\alpha\beta} = 0.$$

Wir setzen (17) ein und streichen den Faktor $\lambda \neq 0$:

$$(g^*_{i\alpha} g_{k\beta} + g^*_{k\alpha} g_{i\beta}) - (g^*_{i\beta} g_{k\alpha} + g^*_{k\beta} g_{i\alpha}) = 0.$$

Daraus erschließt man mühelos, daß g^*_{ik} proportional zu g_{ik} ist, und für den Proportionalitätsfaktor ergibt sich dann aus (20), daß er konstant sein muß.

Obwohl die Verhältnisse, wie man sieht, in den Fällen $\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ ganz verschieden liegen, läßt sich auch hier die Fallunterscheidung überwinden; aber es wäre dazu ein näheres Eingehen auf die Kontinuums-Analysis vonnöten, die Brouwer und ich an die Stelle des heutigen unhaltbar gewordenen Atomismus setzen wollen. Damit darf ich Sie wohl heute nicht behelligen, wennschon sich gerade an diesem Theorem sehr schön und anschaulich die Anforderungen der Kontinuums-Analysis demonstrieren ließen.

Endlich: wie sind die Kugeln in *metrischer* Hinsicht invariant zu kennzeichnen? Darauf geben wir zunächst die Antwort: als Räume skalarer Krümmung, in denen außerdem der invariante Gradient des Krümmungsskalars verschwindet. Hernach werden wir sehen (Satz von F. Schur)[1]), daß für $n > 2$ die zweite Bedingung noch erübrigt werden kann. Beweis: Die Streckenkrümmung $F^\alpha_{\alpha ik}$ eines Raums von skalarer Krümmung verschwindet; er ist daher notwendig ein Riemannscher, und wir können die lineare Fundamentalform ein für allemal $= 0$ annehmen. Die zweite Forderung besagt dann, daß für diese Normaleichung $\lambda =$ const. ausfällt. Unsere Behauptung reduziert sich also sofort darauf: die Kugeln sind die einzigen Riemannschen Räume konstanter skalarer Krümmung. Das ist ein wohlbekanntes, schon von Riemann ausgesprochenes Theorem. Es ergibt sich dafür hier der folgende sehr durchsichtige Beweis. Ein Riemannscher Raum R konstanter skalarer Krümmung erfüllt die im Absatz III angegebenen Bedingungen (I p), (III p), und zwar ist für ihn $G_{ik} = \lambda g_{ik}$. Folglich läßt er sich projektiv auf den ebenen Raum mit der

1) Math. Ann. Bd. 27 (1886), S. 563.

metrischen Fundamentalform $E(dx)$ beziehen. Wir machen das so, daß wir zunächst durch eine lineare Transformation dafür sorgen, daß im Nullpunkt $g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ mit $E(dx)$ übereinstimmt, darauf die Gleichungen (IIp) mit den Anfangswerten $\psi_i = 0$ integrieren und endlich die Abbildung selbst nach dem Beweise von Satz 3 bestimmen. Sind x_i die so ermittelten linearen Koordinaten (die damals mit y_i bezeichnet wurden), so haben die Komponenten des affinen Zusammenhangs von R die Form

$$\Gamma^r_{ik} = \delta^r_i \psi_k + \delta^r_k \psi_i, \tag{21}$$

d. h. es ist

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} (= \Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir}) = g_{ir}\psi_k + g_{kr}\psi_i + 2 g_{ik}\psi_r. \tag{22}$$

Die Bedingung skalarer Krümmung $G_{ik} = \lambda g_{ik}$ aber lautet:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \psi_i \psi_k + \lambda g_{ik} = 0. \tag{22'}$$

Im Nullpunkt ist

$$g_{ik}\,dx_i\,dx_k = E(dx), \qquad \psi_i\,dx_i = 0. \tag{23}$$

Bei gegebenem konstanten λ haben die Differentialgleichungen (22), (22′) offenbar nur eine einzige Lösung g_{ik}, ψ_i mit diesen Anfangswerten, und das ist, wie wir wissen, die Kugel der Krümmung λ.

Ein Raum skalarer Krümmung genügt stets der Bedingung (Ip) mit $G_{ik} = \lambda g_{ik}$. Nach der unter **IV.** angestellten Rechnung folgt daraus für $n > 2$ die Gleichung (IIIp), das ist hier

$$g_{ik}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - g_{ii}\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0. \tag{24}$$

Satz 6. Für $n > 2$ ist jeder metrische Raum skalarer Krümmung eine Kugel; im Falle $n = 2$ muß die Forderung hinzutreten, daß der invariante Gradient der skalaren Krümmung verschwindet.

VI. Wie angemessen diese Beweismethode dem Gegenstande ist, geht aus der folgenden bemerkenswerten Tatsache hervor[1]):

Satz 7. Die einzigen projektiv-ebenen metrischen Räume sind — wenn die Dimensionszahl $n > 2$ ist — die Kugeln.

Die Fragestellung, welche durch diesen Satz erledigt wird, hat kein Analogon im konformen Fall. Die Bestimmung aller-

1) Für Riemannsche Räume wurde dieser Satz, auf andere und wesentlich kompliziertere Weise, schon bewiesen von *Beltrami* ($n = 2$), Ann. di Matem. 7, S. 203; siehe auch Ann. di Matem., ser. II, Bd. 2, S. 232; von *Lipschitz* in der Abhandlung in Crelles Journal Bd. **72**, S. 1 ff. und von *F. Schur*, Math. Ann. Bd. **27**, S. 537—567.

metrischen Räume, welche *konform-eben* sind, wird einfach dadurch geleistet, daß die quadratische Einheitsform $E(dx)$ und eine willkürliche lineare als metrische Fundamentalformen angenommen werden; genau entsprechend erhält man alle *affin zusammenhängenden* Mannigfaltigkeiten, welche *projektiv-eben* sind, mittels einer willkürlichen Linearform $\psi_i dx_i$ aus dem Ansatz (21). Hier aber wird gefragt nach denjenigen *metrischen* Räumen, welche sich projektiv auf einen ebenen abbilden lassen. Unsere Behauptung lehrt, daß die Gleichung (Ip) für einen metrischen Raum von mehr als zwei Dimensionen nur so bestehen kann, daß $G_{ik} = \lambda g_{ik}'$ wird. Sie läßt sich auch dahin formulieren, daß *die Cayleysche Maßbestimmung die einzige Metrik* (in unserm Sinne) *ist, welche in den* (mehr als 2 dimensionalen) *Raum der gewöhnlichen projektiven Geometrie eingebaut werden kann.*

Die Bestimmung aller projektiv-ebenen metrischen Räume verlangt offenbar die Lösung der folgenden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r = g_{ir}\psi_k + g_{kr}\psi_i + 2g_{ik}\psi_r \tag{25}$$

für die unbekannten Funktionen φ_i, ψ_i, $g_{ik} (= g_{ki})$. Setzen wir $2\psi_i - \varphi_i = f_i$, führen allgemein die Bezeichnung ein

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = \varphi_{i|k-k|i}$$

und verstehen wie früher unter Ψ_{ik} den Ausdruck $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \psi_i \psi_k$, so liefert die Integrabilitätsbeziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) - \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_s}\right) = 0,$$

angewendet auf die Gleichungen (25), die folgende Relation

$$(g_{ir}\Psi_{ks} + g_{kr}\Psi_{is}) - (g_{is}\Psi_{kr} + g_{ks}\Psi_{ir}) + g_{ik} f_{r|s-s|r} = 0. \tag{26}$$

Wir dürfen voraussetzen, daß an der zu untersuchenden Stelle

$$g_{ii} = e_i = \pm 1, \quad g_{ik} = 0 \, (i \neq k)$$

ist; dann erhält man aus (26) dadurch, daß man $i = k = r$ nimmt, (wegen $g_{ii} \neq 0$) sogleich

$$\Psi_{ik} + \tfrac{1}{2} f_{i|k-k|i} = \lambda_i g_{ik}.$$

Wählt man darauf $r = i$, $s = k$, so kommt (wegen $g_{ii} g_{kk} - g_{ik}^2 \neq 0$): $\lambda_i = \lambda_k$, also

$$\Psi_{ik} = -\lambda g_{ik} - \tfrac{1}{2} f_{i|k-k|i}. \tag{27}$$

Trägt man das in (26) ein, so liefert das erste Glied λg_{ik} gar keinen Beitrag, und es bleibt eine Gleichung stehen, welche da-

durch aus (26) hervorgeht, daß man Ψ_{ik} durch $-\frac{1}{2} f_{i|k-k|i}$ ersetzt. Sie ist für $n = 2$ identisch erfüllt; allgemein aber erhält man aus ihr durch Multiplikation mit g^{ik} und Summation nach i und k:

$$(28) \qquad (n-2) f_{i|k-k|i} = 0;$$

sodaß unter allen Umständen (26) den beiden Gleichungen (27), (28) äquivalent ist. Wenn $n > 2$ ist, kommt einfach

$$(29) \quad \Psi_{ik} = -\lambda g_{ik}, \qquad (30) \quad f_{i|k-k|i} = 0.$$

Unser Ziel ist damit erreicht; denn (29) besagt, daß der Tensor G_{ik} proportional zu g_{ik} ist. Die schon in unsern früheren Resultaten enthaltene Erkenntnis, daß deshalb notwendig ein Riemannscher Raum vorliegt und bei Verwendung der Normaleichung $\lambda =$ const. wird, bestätigt man hier leicht durch folgende Rechnungen: Aus (29) schließt man

$$\psi_{i|k-k|i} = \Psi_{ik} - \Psi_{ki} = 0,$$

hieraus aber und aus (30): $\varphi_{i|k-k|i} = 0$. Daher darf $\varphi_i = 0$ angenommen werden. Bildet man von der Gleichung (29), die einen Augenblick wieder mit D_{ik} bezeichnet werde, die Integrabilitätsbeziehung

$$\frac{\partial D_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial D_{il}}{\partial x_k} = 0$$

und setzt darin für die Ableitungen von g_{ik} und ψ_i die aus den Gleichungen (25), (29) selber sich ergebenden Ausdrücke ein, so kommt (24). Im Nullpunkt, dürfen wir voraussetzen, gelten die Anfangswerte (23). Dann liegt jetzt genau das gleiche Integrationsproblem vor wie am Schluß des vorigen Abschnitts, dessen einzige Lösung die Kugel von der Krümmung λ ist.

Satz 7 trifft auch im Falle $n = 2$ noch zu, wenn wir uns auf Riemannsche Räume beschränken. Dagegen lassen sich in die gewöhnliche zweidimensionale projektive Ebene noch andere Metriken als die Cayleysche Maßbestimmung einbauen, wenn Nicht-Integrabilität der Streckenübertragung zugelassen wird.

Berichtigungen zu der Arbeit: „Der Aether im Weltbild der Physik" von E. Wiechert (S. 29—70 dieses Heftes).

Seite 31, 3. Absatz, 6. Zeile: Lichtwellen statt Lichtquellen.
Seite 47, 6. Zeile: kleiner statt größer.

Beobachtungen an pazifischen Beben.

Ein Beitrag zum Studium der obersten Erdkruste.

Von

G. Angenheister.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 3. Dezember 1920.

Inhalt.

Tabellen.

Figuren.

I. Makroseismische Beobachtungen an Beben von der Tongarinne.

Für die Erforschung der Tongabeben sind die Beobachtungen am Samoa-Observatorium wegen der geringen Herdentfernung von besonderer Bedeutung.

Die großen Beben von der Tongarinne wurden alle in den Nachbarinseln gespürt. Die makroseismische Beobachtung konnte die Erschütterung der Vorläuferbewegung und der Hauptphase recht gut unterscheiden. Wenn der Vorläufer mit einem scharfen Stoß begann, der etwa 5—10 sec dauerte, trat nach einigen Sekunden verhältnismäßiger Ruhe die oftmals erheblich stärkere Hauptbewegung ein. Meist wurde dies von makroseismischen Beobachtern als zwei aufeinanderfolgende Stöße interpretiert. Das Schüttergebiet war, wie sich aus gesammelten Mitteilungen ergab, meist ein recht beträchtliches. Das Beben vom 26. VI. 1913 wurde bis zu 8° Herddistanz verspürt. Das Beben vom 26. VI. 1917 war das stärkste, das, soweit bekannt ist, je in Samoa wahrgenommen wurde. Es war vom Stärkegrad VIII nach der 12teiligen Skala. Nach den Aufzeichnungen muß die Maximalbeschleunigung in Samoa auf 30 cm/sec^2 geschätzt werden. Es wurde makroseismisch bis zu 6° Herddistanz wahrgenommen. Das Schüttergebiet scheint bei diesem Beben in NS-Richtung weiter ausgedehnt gewesen zu sein als in EW-Richtung. Der Flächeninhalt desselben kann auf etwa 10^6 km^2 geschätzt werden. Die Schütterbewegung der Hauptphase war bei diesem Beben in Samoa vielfach stärker als die der Vorphase. Die Schütterwirkung der Hauptphase dauerte etwa $1\frac{1}{2}$ Minute. Sie wurde auf dem sandigen Boden an der Küste nicht ganz so stark wahrgenommen wie auf dem felsigen Untergrund des höher gelegenen Inlands von Samoa, und überall, nur mit einer Ausnahme, wurde sie als Horizontalbewegung empfunden. In dem Ausnahmefalle wurden auf der vorspringenden schmalen Kuppe eines im Inland gelegenen Hügels wellenförmige Bewegungen ähnlich den Meereswellen wahrgenommen. Der Hügel erhebt sich in der Mitte eines großen Kraterbeckens, dessen Grund 250 m über dem Meere liegt. Infolge dieses heftigen Bebens vom 26. VI. 1917 steigerte sich für die nächsten Wochen die Sensibilität der menschlichen Nerven gegenüber Erderschütterungen. Unter günstigen Verhältnissen (in ruhender Lage im Oberstock) wurden damals noch Erschütterungen gefühlt, deren Maximalbeschleunigung nach den Aufzeichnungen des Seismographen weniger als 0,2 cm/sec^2 betrug, die also dem sonst als unfühlbar bezeichneten Stärkegrad I

angehören. Dagegen verspürte unser recht intelligenter Werkstattchinese, der zur Zeit des Bebens vom 26. VI. 1917 auf mäßig gutem Wege auf dem Zweirad fuhr, nichts von der Schütterwirkung von der Stärke VIII.

Das Beben vom 31. III. 1907 wurde in Tonga als Stärkegrad VI (1—1½ min.) gefühlt. Das Beben vom 30. IV. 1919 wurde in Haapai 2½ min. lang verspürt, in Tongatabu nur etwa 50 sec. Der Herd liegt sehr viel näher bei Haapai. Ähnliche Zeitdauer wurde für die anderen Großbeben gemeldet. Kleine, einige Meter lange Veränderungen der festen Erdoberfläche wurden auf den Inseln bei einzelnen Beben festgestellt, besonders auf angeschüttetem Boden; auch Abstürze an sehr abschüssigen Felswänden waren als Wirkungen der Erschütterungen festzustellen. Nur einmal soll eine größere Veränderung beobachtet sein auf den Keppel-Inseln, ganz in der Nähe des Bebenherdes vom 26. VI. 1917. Dort soll sich bei diesem Beben eine Lagune gehoben haben und jetzt trocken sein; eine Steinmole dagegen soll versunken sein.

Das verhältnismäßig große Schüttergebiet der starken Tongabeben läßt eine beträchtliche Herdtiefe vermuten. Andrerseits wurden bei einigen Tongagroßbeben Flutwellen und vulkanische Tätigkeit beobachtet, die auf große Veränderungen der festen Oberfläche am Meeresgrund schließen lassen. Die Beben vom 1. V. 1917, 26. VI. 1917, 16. XI. 1917 und 30. IV. 1919 waren von Flutwellen begleitet. Nach dem Beben vom 26. VI. 1913 wurde Bimstein in Tonga angeschwemmt. Nach dem Beben vom 26. VI. 1917 wurde ein großes Bimsteinfeld auf offenem Meere im Tongaarchipel wahrgenommen.

II. Die Neigungen im Schüttergebiet.

Die Behauptung, daß im Schüttergebiet makroseismisch merkbare Neigungen auftreten, taucht immer wieder auf. Früher wurden auch erhebliche Neigungen in den Hauptwellen der Fernbeben vermutet, konnten jedoch nicht nachgewiesen werden. Sind nun im Schüttergebiet Neigungen experimentell nachweisbar?

Um die Aufzeichnungen der Seismographen richtig zu verstehen, müssen wir zwischen wirklichen und scheinbaren Neigungen unterscheiden[1]. Das Fortschreiten einer vertikalen Verrückung z in der Richtung x über einer horizontalen Fläche während einer seismischen Störung veranlaßt Hebungen und Senkungen. Erfolgt

1) Siehe E. Wiechert, Theorie der autom. Seismographen. Berlin 1903.

die Bewegung als Sinuswelle, so kann die Vertikalverrückung in der Entfernung x für irgend einen Zeitpunkt dargestellt werden durch:

$$z = \bar{z} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \delta\right),$$

worin $\bar{z}$ den Maximalwert von z, λ die Wellenlänge und δ eine Phasenkonstante bedeutet. Die wirkliche Neigung i_x der Fläche in der Richtung x ergibt sich aus

$$i_x = \frac{dz}{dx} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{z} \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \delta\right)$$

und der Maximalwert der wirklichen Neigung $\bar{i}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{z}$.

Bei einer horizontalen Verrückung infolge einer seismischen Störung tritt eine Änderung der Richtung der Schwerkraft auf. Erfolgt die Horizontalverrückung als Sinuswelle, so kann man für irgend einen Ort setzen

$$x = \bar{x} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right);$$

die mit dieser Bewegung verknüpfte Änderung der Schwerkraftsrichtung ergibt sich aus der Horizontalbeschleunigung; es ist dann die scheinbare Neigung der Vertikalen

$$[i_x] = \frac{1}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{x} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right)$$

und der Maximalwert der scheinbaren Neigung

$$[\bar{i}_x] = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{x}.$$

Die Hauptphase sehr starker Fernbeben enthält Wellen, deren x und z mehrere mm betragen bei einer Periode von etwa 20 sec. Die Wellenlänge solcher Wellen ist bei einer Geschwindigkeit von $3\frac{1}{2}$ km/sec.

$$\lambda = vT = 70 \text{ km}.$$

Bei einer Verrückung von $\frac{1}{2}$ cm in der Horizontalen und einer gleichgroßen in der Vertikalen ergibt sich $\bar{i} = 0''.09$; $[\bar{i}] = 10''.3$. Die scheinbaren Neigungen sind also 115 mal größer. Die Horizontalseismographen zeichnen beide Neigungen auf. Die wirklichen Neigungen sind aber von den viel größeren scheinbaren überdeckt und im Seismogramm nicht zu erkennen.

Bei Nahbeben treten in der Hauptphase Horizontal- und Vertikalverrückungen auf von sehr viel kleinerer Periode bei nahe

gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit als bei Fernbeben. Die Amplituden beider Verrückungen sind von gleicher Größenordnung, meist fast gleich. Angenähert ist also $\frac{\bar{i}}{[i]} = \frac{g}{2\pi v} T = \frac{T}{2200}$; d. h. je kleiner die Periode, desto mehr überwiegen die scheinbaren Neigungen über die wirklichen. Die scheinbaren Neigungen treten also den wirklichen gegenüber bei Nahbeben noch mehr hervor als bei Fernbeben; die wirklichen Neigungen sind also noch weniger als bei Fernbeben im Seismogramm zu erkennen.

Andrerseits aber erreichen die wirklichen Neigungen fortschreitender Sinuswellen in der Hauptphase bei Nahbeben mitunter erhebliche Beträge, die vielleicht auf andere Weise sichtbar gemacht werden können. Die heftigen Beben von der nahen Tongarinne zeigten hier in der Hauptphase Wellen von $\frac{1}{2}$—1 sec Periode und bis zu 5 mm Vertikalbewegung, dem $1''.8 - 3''.7$ wirkliche Neigung entsprechen. Schon mit einem mäßig vergrößernden festmontierten Fernrohr sollten sich diese Neigungen an Sternen erkennen lassen. Unser Passageinstrument besitzt eine 30fache Vergrößerung. Eine periodische Neigung eines Sternes von 2″ sollte damit noch erkannt werden. Das Okularmikrometer enthält neben 15 Parallelfäden 2 Querfäden mit einer Fadendistanz von 2.5 sec. im Äquator oder 37″.5. Läßt man bei ostwestlicher Lage der Querfäden einen Stern sehr nahe an dem einen Querfaden entlang laufen, so lassen sich seitliches Hinundherschwanken des Sternes vom Betrage $\frac{1}{20}$ der Fadendistanz, also wirkliche nordsüdliche Neigungen von 2″, noch sicher erkennen. Beim Beben vom 26. VI. 1917 wurden etwa 8 min. nach Beginn des Bebens Beobachtungen angestellt. Es konnten keine Neigungen mit Sicherheit mehr festgestellt werden. Die Vertikalbewegung war zu dieser Zeit auch schon etwa auf $\frac{1}{2}$—1 mm gesunken, der aus ihr zu erwartende Betrag der wirklichen Neigung schon sicher kleiner als $\frac{1}{2}''$.

Man kann hieraus entnehmen, daß wirkliche Neigungen von mehreren Bogensekunden auch im Schüttergebiet wenige Minuten nach Ende der Erschütterung nicht vorkommen, daß die wirklichen Neigungen also den aus z und λ zu erwartenden Betrag wohl nicht sehr erheblich übersteigen werden.

Ob während der Erschütterung große Neigungen auftreten, wie die makroseismische Beobachtung bei sehr starken Beben behauptet, konnte noch nicht festgestellt werden. (Neigungen infolge Eigenschwingungen des massiven Beobachtungspfeilers ($1.1^m \times 0.5^m \times 0.5^m$) können selbst während der Schütterzeit des Bebens wohl nicht mit Bodenneigungen verwechselt werden.)

III. Bestimmung der Epizentren.

Zur Ermittelung der Epizentren von 13 Tongagroßbeben aus den Jahren 1907—19 wurden die makroseismischen Beobachtungen aus den Inseln mit berücksichtigt. Doch konnte sich mit ihrer Hilfe natürlich keine genaue Herdlage ergeben, wie das in dichtbevölkerten Gegenden zuweilen möglich ist, zumal der Herd hier wohl immer unter dem Meere lag. Zu genauen Bestimmungen des Epizentrums mußten die Aufzeichnungen der Seismographen der Nachbarstationen verwendet werden. Von diesen Stationen lag nur eine, Apia, im Schüttergebiet.

Die Epizentren wurden nun auf zwei Weisen bestimmt, erstens nur mit Hülfe der Aufzeichnungen in Apia; das Azimut des Herdes wurde aus dem Verhältnis der Komponenten der Bodenbewegung während des ersten Ausschlages der Vorläuferbewegung genommen, die Herddistanz aus der Vorläuferlänge $S—P$ nach den bekannten Laufzeitkurven. Die verwendete Göttinger Laufzeitkurve (1914) nach Gutenberg wurde mit der des Bebens vom 8. II. 1909 etc. nach Mohorovicic und der des süddeutschen Bebens vom 16. November 1911 nach Zeisig verglichen und für die in Frage kommenden Herddistanzen innerhalb 1—2 sec übereinstimmend gefunden.

Zweitens wurden die Epizentren mit Hilfe der in und am Pazifik gelegenen Stationen ohne Samoa berechnet. Die Herddistanz dieser Stationen lag meist zwischen 30°—80°, nur selten etwas näher oder weiter. Benutzt wurden zu jedem Beben meist etwa 6—7 Stationen, nach Möglichkeit nach verschiedenen Azimuten verteilt; bevorzugt wurden, wenn Berichte von einer größeren Zahl von pazifischen Stationen vorlagen, diejenigen Stationen, die die empfindlicheren Instrumente mit größerer Registriergeschwindigkeit besitzen. Das verwendete Verfahren zur Bestimmung von Herdzeit und Epizentrum war hierbei ein approximatives. Es wurde von einer angenähert bekannten Herdzeit und Herdlage ausgegangen und die Herddistanzen für die verschiedenen Stationen bestimmt, daraus mit Hilfe der im Bereich 30°—80° gut gesicherten Göttinger Laufzeitkurven von 1914 die Laufzeiten; aus ihnen und der angenommenen Herdzeit wurden Ankunftszeiten für die verschiedenen Stationen berechnet, die mit den beobachteten verglichen wurden. Aus der Differenz beider an einer Station wurde nach der Laufzeitkurve eine entsprechende Änderung der Herddistanz für diese Station vorgenommen und der Herd im Azimut der Station entsprechend verschoben. Aus den verschiedenen Ver-

schiebungen des Herdes in den Azimuten der verschiedenen Stationen wurde eine mittlere Verschiebung und damit ein verbesserter Herd gewonnen, daraus verbesserte Herddistanzen, dazu aus der Laufzeitkurve die Laufzeiten und daraus durch Subtraktion von den Ankunftszeiten eine verbesserte mittlere Herdzeit, etc. Das Verfahren kann sowohl graphisch wie auch rechnerisch verfolgt werden. (Siehe Geiger, Göttinger Nachrichten 1910.)

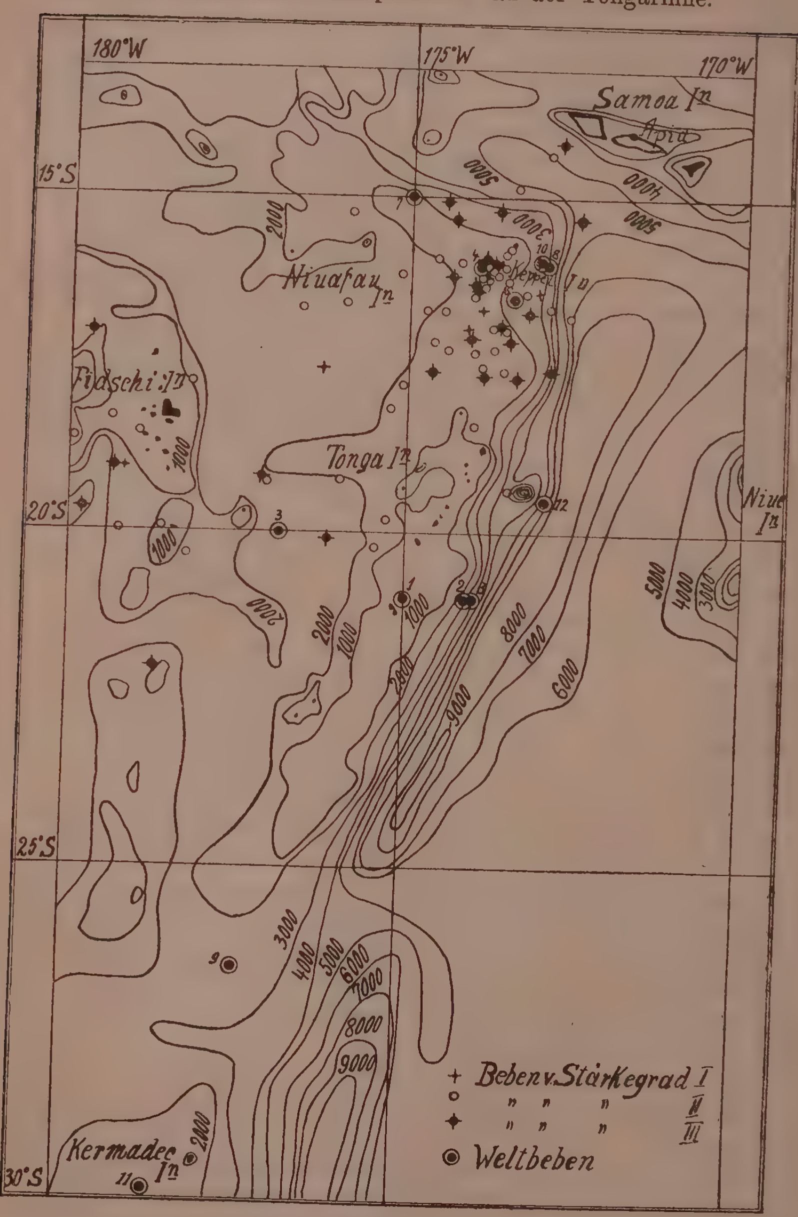
Die aus beiden Methoden gewonnenen Epizentren wurden miteinander verglichen. Die aus den Samoa-Registrierungen allein gewonnenen Epizentren besaßen für Samoa alle eine geringere Herddistanz (bis zu $2^0.4$, im Mittel $1^0.3$) als die aus den Beobachtungen der entfernteren Stationen berechneten. Die Azimute in Samoa nach den aus beiden Methoden berechneten Epizentren zeigten beträchtliche, doch nicht systematische Abweichungen von einander. Die aus den entfernten Stationen berechneten Epizentren schlossen sich im ganzen besser an die makroseismischen Beobachtungen an, als die aus den Samoaregistrierungen bestimmten.

Für eine Station in der Nähe des Herdes kann die Gestalt, Ausdehnung und Lage der Bruchlinie eines tektonischen Bebens von Einfluß sein auf die Laufzeit und damit auf die Vorläuferlänge. Man könnte sich denken, daß die Bewegung an dem näher an Apia gelegenen Ende der Bruchlinie leicht begonnen hat (Reißen), während der Hauptstoß von entfernteren Teilen kam, und daß nur die herdnahe Station den leichten Beginn des Reißens verzeichnete. Doch bei einem scharfen Stoß im Anfang der Vorläuferbewegung in Apia — und darum handelt es sich hier fast immer — läßt sich das relativ zu den andern Stationen verfrühte Eintreffen der Bewegung in Apia nicht so erklären, auch nicht durch eine große Herdtiefe, dafür ist die Verfrühung zu groß.

Ich möchte darum annehmen, daß aus den Ankunftszeiten entfernterer Stationen die Epizentren der Tongabeben richtig bestimmt sind und daß das verfrühte Eintreffen der Bewegung in Apia reell ist. Tabelle I gibt die Daten, Herdzeiten und Koordinaten dieser Epizentren. Für Apia wurden hieraus die Herddistanzen und Laufzeiten bestimmt und danach eine Laufzeitkurve für P und S und eine Kurve für $S-P$ gezeichnet.

Die Epizentren der 12 Großbeben wurden nach dem Datum nummeriert in die folgende Figur eingetragen. Sodann wurden für 77 weitere Tongabeben aus den Jahren 1913 bis 1919 die Epizentren mit Hilfe der Samoaregistrierungen allein bestimmt. Die Herddistanz aus S—P nach der eben erwähnten aus den Tongagroßbeben gewonnenen Laufzeitkurve und das Azimut α aus dem

Karte der Erdbeben-Epizentren an der Tongarinne.



Figur 1.

Verhältnis der Horizontalkomponenten der Bodenbewegung des ersten Einsatzes $\frac{A_E}{A_N} = \operatorname{tg} \alpha$. Die erste vertikale Bodenbewegung zeigt an, ob eine Bewegung vom Herde fort (nach oben in der Station) oder zum Herde hin (nach unten) vorliegt. Die Epizentren dieser 77 Beben wurden ebenfalls in die Karte eingetragen. Der oben angestellte Vergleich der Azimute der aus Fernstationen berechneten Großbebenherde in Samoa mit den aus $\frac{A_E}{A_N}$ berechneten Azimuten derselben Beben zeigte, daß wohl eine Streuung der Epizentren eintreten kann, wenn die Azimute aus dem Komponentenverhältnis berechnet werden, doch keine systematische Verschiebung aller Herde wahrscheinlich ist. Die eingetragenen 77 Beben zeigen nun tatsächlich eine gewisse Streuung, doch im wesentlichen eine ausgesprochene Gruppierung um eine nahe NS verlaufende Linie, deren Lage nach dem obigen als gut gesichert angenommen werden kann. Auch zeigt sich eine erhebliche Häufungsstelle bei den Keppel-Inseln. Die Karte enthält die Linien gleicher Meerestiefe. Die Beben liegen sämtlich auf dem Tongaplateau westlich der Tongarinne und nicht in der Tongarinne. Ein Fortschreiten der Lage der Epizentren nach einer bestimmten Richtung mit der Zeit ist an den nach dem Datum nummerierten 13 Großbeben von 1907—1919 nicht zu erkennen. Ebenso wenig war dies bei einem Schwarm von 15 Beben in der Zeit vom 6.—14. Juni 1915 möglich [1]). Die Lage der Bebenherde scheint, wie weiter unten gezeigt werden soll, in einem bestimmten Zusammenhang mit den Schwerestörungen zu stehen. Auch wird sich empfehlen, die Lage der Epizentren mit dem Verlauf der Linien gleicher Kraft und Richtung des erdmagnetischen Feldes zu vergleichen. Eine solche Karte auf Grund der neuesten Vermessung wird demnächst von der Carnegie Institution herausgegeben.

IV. Die Laufzeitkurve.

1. Zwischen 0° und 20° Herddistanz.

Die Herdzeiten und Epizentren für die 12 Großbeben der Tongarinne können nun zur Erweiterung unserer Kenntnis der Laufzeitkurve verwendet werden. Für die Herddistanz 0°—20° ist dies mit Hilfe der Samoabeobachtungen bereits geschehen, eine

---

1) Die Herde dieses Schwarmes lagen auf einem Areal, das sich von NO nach SW erstreckt und 100 km breit, 400 km lang ist.

Beobachtung von Wellington und zwei von Christchurch sind noch hinzuzufügen. Diese Laufzeitkurven *P*, *S* und *S—P* wurden verglichen mit den aus kontinentalen Beben gewonnenen (Gutenberg, 1914, Zeisig, A Mohorovicic), die untereinander auf 1—2 sec übereinstimmen. (Mohorovicic unterscheidet zwischen 2°.5 und 6° eine Zweiteilung des ersten und zweiten Vorläufers in einem scharfen Einsatz *P*, *S* und ein einige Sekunden früheres Auftauchen *P*, *S* und gibt für beide besondere Laufzeiten. Seine Laufzeitkurve gilt nach ihm für 25 km Herdtiefe). Gegenüber diesen Laufzeiten sind unsere kürzer, am meisten bei 6—7° Herddistanz, für *P* etwa 13 sec, für *S* etwa 25 sec. (Siehe Tabelle IIIa und Figur 2.)

Nimmt man eine Dicke der obersten Erdkruste von etwa 50 km an, so würden bei 6° Herddistanz die beiden Vorläuferwellen wohl noch ganz in dieser obersten Schicht verlaufen. Wir hätten dann die größere Geschwindigkeit der Erdbebenwellen der Tongabeben dem Verhalten dieser obersten Kruste zuzuschreiben. Die Wellen der Tongabeben verliefen nun unter dem Ozean, diejenigen, die zur Vergleichskurve benutzt werden, stammen von kontinentalen Beben und verliefen unter dem Kontinent. Die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in der obersten Kruste ist also unter dem Ozean größer als unter dem Kontinent. Der Grund hierfür wird wohl in einer höheren Elastizität der obersten Erdkruste unter dem Ozean zu suchen sein. Die Beobachtungen, die unserer Laufzeitkurve zugrunde liegen, sind noch zu gering an Zahl und zu schlecht verteilt, um darauf eine Berechnung der Scheitelgeschwindigkeit in den verschiedenen Tiefen der obersten Kruste unter dem Ozean zu bauen. Es wird vorher versucht, das Material weiter zu ergänzen. Es soll jedoch schon jetzt erwähnt werden, daß sich aus den obigen Beobachtungen die Geschwindigkeiten des zweiten Vorläufers in einer obersten 50 km dicken Kruste unter dem Ozean zu rund 18 % höher erweisen als unter dem Kontinent; für eine Scheiteltiefe von 50 km ist $v_{Oz} = 4.83$; $v_{Ko} = 4.12 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$.

2. Zwischen 80° und 180° Herddistanz.

Die Epizentren und Herdzeiten der 12 großen Tongabeben wurden aus den Ankunftszeiten der pazifischen Stationen zwischen etwa 30° und 80° Herddistanz gewonnen. Für Stationen größerer Herddistanzen können diese Daten wieder zur Berechnung der Laufzeiten verwendet werden. Das ist im Folgenden geschehen.

B. Gutenberg veröffentlichte in den Nachrichten d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1914 Laufzeitkurven für *P*, *S* und deren Re-

flexionen. In der Gutenberg'schen Laufzeitkurve lassen sich die P-Wellen bis 106° Herddistanz verfolgen. Von 143°—180° Herddistanz tauchen nach Gutenberg die *P*-Wellen wieder auf. Zwischen 106° und 143° klafft eine unausgefüllte Lücke.

E. Rudolf und S. Szirtes veröffentlichten in der No. vom 1. August 1914 der physikalischen Zeitschrift eine kurze Notiz, worin sie neue Laufzeitkurven ankündigen, die auf Beobachtungen an 74 Erdbeben vom Jahre 1906—1913 beruhen. Nach dieser Mitteilung erleiden die P-Wellen keine Unterbrechung, sondern lassen sich kontinuierlich bis 150° verfolgen. Bei 150° beträgt ihre Laufzeit 965 sec. Von den PP-Wellen (erste Reflexion von *P*) zweigt sich bei 113° ein Wellenzug ab, der sich bis 180° verfolgen läßt; die Laufzeit dieses Wellenzuges geben die Verfasser auf 11 Minuten für 113° und 12½ Minute für 180° an. (Da muß wohl ein Druckfehler vorliegen). Nach Rudolf und Szirtes fällt dieser Wellenzug in seiner letzten Hälfte mit dem schon bekannten auch von Gutenberg beobachteten (zwischen 143° und 180°) Wellenzug zusammen, der früher als wieder auftauchende *P*-Wellen angesehen wurde. Bei 136° zeigt dieser Wellenzug nach Rudolf und Szirtes eine Unterbrechung, die möglicherweise auch durch mangelnde Beobachtungen erklärbar sei.

Die Resultate von E. Rudolf und Szirtes liegen, soviel mir bekannt ist, bisher nur in dieser kurzen Notiz ohne Figur und Zahlenmaterial als vorläufige Mitteilung vor. Sie sind indes so wichtig, daß sie wohl einer Bestätigung und Ergänzung bedürfen.

Soweit Beobachtungsmaterial für Stationen über 80° Herddistanz vorlag, wurden folgende von den Tongagroßbeben für eine Laufzeitkurve von P und PP (den einmal reflektierten P-Wellen) verwendet: 26. VI. 1913, 6. X. und 20. XII. 1914, 11. X. und 20. X. 1916, 1. V. und 26. VI. 1917, 30. IV. 1919. Für die 3 letzten besonders starken Beben fehlen mir die Angaben der meisten europäischen Stationen. Da das vorliegende Material der Tongabeben zu lückenhaft war und gute Beobachtungen über 115° Herddistanz selten waren, so mußten noch einige weitere Beben aus dem Pazifik verwendet werden. Als geeignet erwiesen sich 7 Beben von Neu-Guinea, den Hebriden und Salomons-Inseln und 5 aus dem nördlichen Teil von Südamerika und westlich von Mittelamerika (siehe Tabelle I). Da für den Verlauf der Laufzeitkurve in großer Herddistanz die Genauigkeit der Koordinaten des Epizentrums nicht dieselbe Bedeutung hat wie für den Verlauf in geringer Herddistanz, so konnten hier die schon anderweitig[1]) be-

1) Brit. Atl. Seism. Comm.; Shide.

rechneten Herde nach sorgfältiger Prüfung und geringer Änderung als genügend genaue angesehen werden. Von diesen Beben wurden nur Stationen über 80° Herddistanz benutzt. (Siehe Tabelle IIIb und Figur 3.)

Die Laufzeitkurve bestätigt im wesentlichen die Resultate von Rudolf und Szirtes, nämlich daß sich die *P*-Wellen ununterbrochen bis etwa 150° verfolgen lassen, und daß sich von den *PP*-Wellen ein Wellenzug abzweigt, der sich, übrigens ohne Unterbrechung, bis fast 180° verfolgen läßt. Im einzelnen sind allerdings erhebliche Abweichungen vorhanden, besonders die, daß die Laufzeit der *P*-Wellen bei 150° etwa 100 sec größer gefunden wurde, als sie von Rudolf und Szirtes angegeben wurde.

Die Abzweigung des Wellenzuges *P'* von *PP* muß schon früher, etwa bei 100° stattfinden, denn zwischen 107° und 113° wurden mehrfach zwei Einsätze beobachtet, die im Mittel 70 sec nach einander eintraten, und von denen der erste zu *P'*, der zweite zu *PP* gehört. Bei der Fortführung der *P*-Kurve über 115° hinaus leisteten besonders die russischen Stationen mit Galitzin-Seismographen gute Dienste.

Es läßt sich aus der *P*-Kurve schon jetzt erkennen, daß die bisher vermutete große Geschwindigkeitsabnahme in rund 3000 km Tiefe keineswegs so bedeutend sein kann, wie angenommen wurde. Es scheint jedoch ratsam, die Berechnung der Geschwindigkeiten in diesen Tiefen zu verschieben, bis die *P*-Kurve zwischen 130° und 150° besser gesichert ist und die gerade hier bestehende schon vorn erwähnte Differenz von 100 sec gegenüber den Angaben von Rudolf und Szirtes aufgeklärt ist, zumal diese Aufklärung sofort erfolgen kann, wenn für die hier benutzten Tongabeben vom 1. V. 1917, 26. VI. 1917 und 30. IV. 1919 die europäischen Beobachtungen herangezogen werden. Leider ist mir dies hier nicht möglich gewesen.

V. Geschwindigkeit der Oberflächenwellen und Elastizität der obersten Erdkruste.

Der Unterschied in der Geschwindigkeit, der sich für die Vorläuferwellen unter dem Kontinent und Ozean ergab, wurde dem elastischen Verhalten der obersten Erdkruste zugeschrieben. Der größte Unterschied in der Laufzeit besteht für eine Herddistanz von etwa 6°, bei der die Wellen bis etwa 50 km tief eintauchen, also noch ganz in einer Schicht verlaufen, die wohl mit der obersten festen Erdkruste identisch sein könnte. Bei 18° Herddistanz hat

sich der Unterschied der Laufzeit unter dem Kontinent und Ozean nahezu ausgeglichen und tritt weiter nicht mehr zutage. Bei 18⁰ Herddistanz beträgt die Wegstrecke, die die Vorläuferwellen in der obersten Schicht von 50 km Dicke durchlaufen, noch nicht 10 % ihres gesamten Weges, gegen ¼ ihres Weges bei 6⁰ Herddistanz. Demnach kann der Unterschied der Laufzeiten unter dem Ozean und Kontinent, soweit er durch das verschiedene elastische Verhalten der obersten Schicht verursacht wird, bei 18⁰ und größerer Herddistanz nur noch wenige Sekunden (etwa 2.5 für P) betragen. Bei größeren Herddistanzen über 20⁰ wird man also nur sehr schwer aus den Laufzeiten der Vorläufer Schlüsse auf die Geschwindigkeit in der obersten Erdkruste ziehen können. Bei der günstigeren Herddistanz von etwa 3⁰—8⁰ wird man dagegen für Beben, deren Wellen unter der Tiefsee gelaufen sind, einstweilen wohl auf die Angaben von recht wenigen Stationen, meist nur auf eine einzige, angewiesen sein. Es wurde daher auf anderem Wege eine Bestätigung für das verschiedenartige elastische Verhalten der obersten Erdkruste unter Kontinent und Ozean gesucht.

Dazu wurden die Hauptwellen der Fernbeben benutzt. Diese laufen längs der Oberfläche. Wir wollen untersuchen, ob ihre Geschwindigkeit unter dem Ozean und Kontinent verschieden ist.

Es sind in der Hauptphase zu unterscheiden: 1) Querschwingungen L_Q; sie schwingen horizontal und senkrecht zur Fortschreitungsrichtung, sie besitzen also keine Vertikalkomponente. Nach Wiechert sind dies Scherungswellen, die in der obersten frei auf der Magmaschicht ruhenden festen Erdkruste mit der Geschwindigkeit b der Scherungswellen fortschreiten.

2) Rayleigh'sche Wellen L_R; sie beginnen im Seismogramm mit einer Vorphase sinkender Periode, die nach wenigen Schwingungen konstant wird; sie schwingen in Ebenen parallel der Fortschreitungsrichtung und der Vertikalen; ihre Geschwindigkeit ist etwas geringer (0.9 der Geschwindigkeit der Scherungswellen). Das Maximum der Bewegung tritt meistens ein während der Vorphase sinkender Periode. Bei den hier verglichenen Bewegungen an zwei weit voneinander entfernten Stationen lag das Maximum stets im Bereich der sinkenden Periode, erfolgte nahezu im Azimut des Herdes und war an beiden Stationen an dieselbe Periode geknüpft und daher leicht zu identifizieren.

Es wurden zum Vergleich die Aufzeichnungen zweier sehr starker Beben, des Kurilenbebens vom 1. V. 1915 und des Kamtschatkabebens vom 31. VII. 1915 in Apia und Tiflis ausgewählt.

Die beiden Stationen haben bei beiden Beben sehr nahe gleiche Herddistanz, etwa 8000 km. Die Differenz der Herddistanzen der beiden Stationen beträgt nur 90 und 220 km. Die Erdbebenwellen laufen nach Samoa bei beiden Beben ganz unter der Tiefsee. Die mittlere Tiefe des Meeres auf diesem Wege beträgt mehr als $4\frac{1}{2}$ km. Nach Tiflis laufen die Wellen bei dem Kamtschatkabeben 200 km unter Flachsee von 150 m Tiefe, sonst unter dem asiatischen Kontinent, beim Kurilenbeben 400 km unter Flachsee von 150 m Tiefe, 450 km unter dem Ochotskischen Meer von etwa 1000 m Tiefe, sonst unter dem asiatischen Kontinent. Die nahezu gleiche Herddistanz erleichtert das Identifizieren der Phasen, die verglichen werden sollen. Eine große Herddistanz muß gewählt werden, damit etwaige Unterschiede in der Geschwindigkeit unter dem Kontinent und Ozean in den Laufzeiten der Oberflächenwellen stark hervortreten und jedenfalls vielfach größer sind als die Ungenauigkeit, mit der die verglichenen Phasen identifiziert werden können. Für das Maximum der Bewegung betrug die Differenz der Ankunftszeit in Apia und Tiflis im Mittel 9 min. Zur Herdberechnung wurden nur Stationen mit empfindlichen Instrumenten großer Registriergeschwindigkeit benutzt. Aus der berechneten Herddistanz und Herdzeit wurden die Ankunftszeiten des ersten Vorläufers mittels der Göttinger Laufzeitkurve 1914 berechnet und mit den beobachteten verglichen. Die benutzten Stationen wurden dabei nach ihrem Azimut in drei Gruppen geordnet: asiatische, pazifische, amerikanische. Die Differenzen der beobachteten und berechneten Ankunftszeiten betrugen im Mittel bei keiner Gruppe über 2 sec. Die Herddistanzen nach Apia und Tiflis sind wenigstens auf $\pm 0^0.5$ sicher.

Die beigefügten Tabellen enthalten: 1) Die Analyse der Seismogramme von Apia und Tiflis für beide Beben (bei den verglichenen Phasen von Welle zu Welle). Tab. V u. VI. 2) Daten zur Herdberechnung. Tab. IV. 3) Die verglichenen Phasen der Hauptwellen, ihre Periode, Ankunftszeit, Laufzeit, Geschwindigkeit und Amplitude für Apia und Tiflis; zum Vergleich sind noch einige Daten für Riverview (Sydney) und Pulkowa beigefügt. Tab. VII u. VIII.

Es ergab sich: Für Apia beträgt das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Rayleigh'schen Wellen zu den Querschwingungen $\frac{V_R}{V_Q} = 0.93$; das ist also fast genau der Betrag, den die Theorie fordert, 0.92, wenn die Querschwingungen mit der Geschwindigkeit der Scherungswellen fortschreiten. Die Theorie liefert den Wert

0.92 unter der Annahme, daß die Poisson'sche Konstante = $\frac{1}{4}$ ist. Unser Wert 0.98 zeigt, daß dies auch in der obersten Kruste angenähert zutrifft.

	Geschwindigkeit V in km/sec				
	L	L_g	M_1	M_2	M_3
Ozean: Apia	[illegible] / 4.65 } 4.68	[illegible] / 4.43 } 4.36	[illegible] / 3.93 } 4.04	[illegible] / 3.75 } 3.74	[illegible]
Ozean: Riverview	4.58		3.74 / 3.61 } 3.67	3.48	
Kontinent: Tiflis	4.16 / 3.58 } 3.87		3.30 / 3.24 } 3.27	2.81 / 2.74 / 3.18 } 2.91	2.39
Kontinent: Pulkowa	4.09		3.14		
V_{Oz}/V_{Ko}					
Apia und Tiflis	1.21		1.26	1.28	1.21
Riverview u. Pulkowa	1.12		1.17		

Aus dem Vergleich der Beobachtungen in Apia und Tiflis ergibt sich, daß die Querschwingungen unter dem Ozean um 21 %, das erste Maximum der Rayleighwellen um 26 % schneller fortschreitet als unter dem Kontinent. Aus der Verfrühung des zweiten Vorläufers in Samoa sahen wir vorher, daß diese S-Wellen, denen in der obersten Erdkruste die gleiche Geschwindigkeit wie den L_g-Wellen zukommt, bei 6° Herddistanz unter dem Ozean um 18 % schneller liefen als unter dem Kontinent.

Für Sydney und Pulkowa ergeben sich etwas geringere Werte, was sich wohl dadurch erklären läßt, daß der Weg nach Sydney zum Teil unter Flachsee verläuft. Wir können die größere Geschwindigkeit der Querschwingungen unter dem Ozean gegenüber dem Kontinent (21 %) vielleicht durch eine größere Righeit des Untergrundes erklären.

Der Unterschied der Righeit würde dann 44 % betragen. Die Geschwindigkeit der Scherungswellen $\sqrt{\frac{k^2}{\varrho}}$ enthält aber neben

der Righeit b^2 noch die Dichte ϱ des Materials. Eine Abnahme der Dichte würde also ebenfalls eine Zunahme der Geschwindigkeit zur Folge haben, doch ist nach geologischen Anschauungen und nach Schweremessungen nicht eine Abnahme sondern eine Zunahme der Dichte der Schicht unter dem Ozean gegenüber den Kontinenten zu erwarten.

VI. Die Absorption der Bodenbewegung.

Der Vergleich der Amplitude des Maximums der Hauptphase (alle von der Ruhelage aus gemessen) ergab bei beiden Beben, daß bei gleicher Herddistanz die Bewegung in Samoa bedeutend geringer ist als in Tiflis, nur etwa halb so groß.

Wenn auch die Bestimmungen der wahren Bodenbewegungen mit großer Unsicherheit behaftet sind, so sind diese Unterschiede dadurch doch nicht erklärbar. Man muß daher wohl annehmen, daß entweder die Absorption der Energie auf dem einen Wege (unter dem Ozean) erheblich größer ist als auf dem anderen (unter dem Kontinente), oder daß sich die Energie schon am Herd nach den verschiedenen Azimuten hin verschieden verteilt hat. Letzteres kann wohl mitgewirkt haben. Die Herde beider Beben liegen an der Nordwestseite der großen nordwestpazifischen Tiefe. Erdbeben an solchen Bruchspalten scheinen nach den makroseismischen Beobachtungen ein streifenförmiges Schüttergebiet zu besitzen. Ob die Verteilung der Bebenenergie in größerer Entfernung vom Herd noch asymmetrisch ist, ist nicht bekannt. Würde der ganze Unterschied der Bewegung in dem gleich weit vom Herd entfernten Apia und Tiflis nur von der Verschiedenheit der Absorption a_{Oz} unter dem Ozean und a_{Ko} unter dem Kontinent herrühren, die Energie im Herd also nach allen Seiten gleich stark ausgestrahlt, so ist

$$J_{Sa} = J_0 e^{-a_{Oz} \Delta_{Sa}}$$

$$J_{Ti} = J_0 e^{-a_{Ko} \Delta_{Ti}}.$$

Wir können nun praktisch die Herddistanz $\Delta_{Sa} = \Delta_{Ti} = \Delta$ setzen, dann ist $\frac{J_{Sa}}{J_{Ti}} = e^{\Delta(a_{Ko} - a_{Oz})}$. Die Energie einer sinusförmigen Schwingung ist proportional dem Quadrat des maximalen Wertes der Geschwindigkeit $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T} A\right)^2 \cos^2 2\pi\left(\frac{t+\delta}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ und kann also für ungeänderte Periode dem Quadrat der Amplitude A pro-

portional gesetzt werden. Verglichen wurden Wellen gleicher Periode. Es ergibt sich dann

$$a_{Oz} - a_{Ko} = \frac{2}{\varDelta} \log \text{nat} \frac{A_{Ti}}{A_{Sa}}.$$

Als Amplituden, die hier verglichen werden, wurden die maximalen Horizontalverrückungen gewählt. Diese lagen beim ersten Maximum sowohl in Tiflis wie in Samoa nahezu im Azimut des Herdes. In Tiflis betrug die maximale Horizontalverrückung beim Beben vom 1. V. 1915 3.82 mm und erfolgte im Azimut N 23° O, während der Herd von Tiflis aus im Azimut N 36° O lag; in Apia betrug sie 2.02 mm im Azimut N 30° W, während der Herd von Apia aus im Azimut N 23° W lag. Der Hauptanteil dieser maximalen Verrückungen im ersten Maximum wird also wohl von Rayleigh'schen Wellen geliefert, denen aber immerhin Querschwingungen, besonders im weiteren Verlauf, untermischt sein mögen. Die verglichenen Bewegungen besaßen in beiden Stationen sehr nahe gleiche Perioden von etwa 31 sec.

Der Absorptionskoeffizient der Energie der Maximalphase wurde von mir früher berechnet aus den Amplituden der Maximalbewegung M und der Wellen W_2, die durch den Gegenpunkt des Epizentrums zur selben Station gelaufen sind. Inzwischen sind solche Berechnungen für andere Beben mehrfach wiederholt worden. Die von verschiedenen Beobachtern (Galitzin, Pechau und anderen) gelieferten Mittelwerte liegen alle zwischen 0.00031 und 0.00027 pro km.

Das Gesamtmittel liegt bei 0.00027. Da eine große Zahl Beben zu dieser Berechnung verwendet wurden, kann man wohl annehmen, daß im Mittel die Weglängen, die die zur Berechnung verwendeten Gegenpunktswellen unter Tiefseen und Kontinenten gelaufen sind, sich verhalten wie die Areale beider. Rechnen wir zu den Kontinenten die Flachseen bis zu 400 m Tiefe, so ist dieses Verhältnis $\frac{64}{36}$. Wir wissen aber nicht, wie sich bei jedem einzelnen der verwendeten Beben der Weg unter dem Ozean zu dem unter dem Kontinent verhielt.

Nehmen wir allgemein an, daß ein Wellenzug nacheinander Medien von den verschiedenen Absorptionskoeffizienten $a_1 a_2 \ldots a_n$ durchläuft. Die entsprechenden Wegstrecken in den verschiedenen Medien seien $s_1 s_2 \ldots s_n$. Die Energie von einem Strahlungssektor am Anfang sei J_0, am Ende der ersten Wegstrecke J_1 u. s. w., am Ende der $n$ten J_n. Es gilt dann:

$$J_0 = \frac{J_1}{e^{-a_1 s_1}};\ J_1 = \frac{J_2}{e^{-a_2 s_2}};\ \ldots;\ J_{n-1} = \frac{J_n}{e^{-a_n s_n}}.$$

$$\frac{J_n}{J_0} = e^{-a_1 s_1 - a_2 s_2 \ldots a_n s_n}$$

und es folgt

$$2 \log \text{nat} \frac{A_n}{A_0} = -a_1 s_1 - a_2 s_2 - \cdots a_n s_n$$

wenn A_0 und A_n die Amplituden der direkt und der über den Gegenpunkt des Herdes zur Beobachtungsstation gekommenen Wellen bedeuten. Sind nur zwei Arten von Medien von der Absorption a_{Oz} und a_{Ko} vorhanden und sind die Wegstrecken in ihnen $s_{Oz,1}\ s_{Oz,2} \ldots$ und $s_{Ko,1}\ s_{Ko,2} \ldots$, so ist

$$2 \log \text{nat} \frac{A_n}{A_0} = -a_{Oz}(s_{Oz,1} + s_{Oz,2} + \cdots) - a_{Ko}(s_{Ko,1} + s_{Ko,2} + \cdots)$$

$= -p a_{Oz} - q a_{Ko}$; wo p den ganzen Weg unterm Ozean, q den unterm Kontinent bedeutet.

Es seien nun r Beben zur Berechnung verwendet. Das Verhältnis des Weges unterm Ozean p zu dem Gesamtweg $p+q$ ist bei den einzelnen Beben $\frac{p_1}{p_1+q_1}, \frac{p_2}{p_2+q_2}, \ldots \frac{p_r}{p_r+q_r}$. Der Mittelwert hiervon ist gleich dem Verhältnis des Ozeanareals zum Gesamtareal der Erde $\frac{64}{100}$. Das Verhältnis des Weges unterm Kontinent q zu dem Gesamtweg $p+q$ ist $\frac{q_1}{p_1+q_1}, \frac{q_2}{p_2+q_2} \cdots$; der Mittelwert $\frac{36}{100}$. Es gilt dann für die einzelnen Beben:

$$-a_{Oz} \frac{p_1}{p_1+q_1} - a_{Ko} \frac{q_1}{p_1+q_1} = \frac{2}{p_1+q_1} \log \text{nat} \frac{A_{n,1}}{A_{0,1}} = -a_1$$

$$-a_{Oz} \frac{p_2}{p_2+q_2} - a_{Ko} \frac{q_2}{p_2+q_2} = \frac{2}{p_2+q_2} \log \text{nat} \frac{A_{n,2}}{A_{0,2}} = -a_2 \text{ usw.}$$

bis zum Index r.

$$-a_{Oz} \frac{1}{r}\left(\frac{p_1}{p_1+q_1} + \frac{p_2}{p_2+q_2} + \cdots\right) - a_{Ko} \frac{1}{r}\left(\frac{q_1}{p_1+q_1} + \frac{q_2}{p_2+q_2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{-a_1 - a_2 - \cdots}{r} = -a.$$

Hier sind die Koeffizienten von a_{Oz} und a_{Ko} nach dem obigen 0.64

und 0.36, und der Mittelwert von $a_1 a_2 \ldots$ war $a = 0.00027$; folglich ist: $0.64 a_{Oz} + 0.36 a_{Ko} = 0.00027$. Andererseits fanden wir:

$$a_{Oz} - a_{Ko} = \frac{2}{\Delta} \log \text{nat} \frac{A_{Ti}}{A_{Sa}}.$$

Aus beiden Gleichungen erhielt ich im Mittel:

	Periode	a_{Oz}	a_{Ko}
Horizontale Bewegung:	sec 31	0.00032	0.00017
	25	0.00038	0.00010
	20	0.00037	0.00009
Vertikale Bewegung:	24	0.00030	0.00022

In allen Fällen ist die Bewegung unterm Ozean stärker gedämpft als unterm Kontinent. Für größere Perioden ist dieser Unterschied geringer als für kleinere, für die Vertikalkomponente ist er kleiner als für die horizontale.

Wenn bei den Perioden von 20 sec im weiteren Verlauf der Hauptphase Eigenschwingungen der obersten Kruste mitwirken, könnte man vermuten, daß ihre geringere Dämpfung unter Kontinenten dadurch bedingt ist, daß die Lava, auf der die Kontinentalblöcke schwimmen, nachgiebiger ist als die, auf der der Meeresboden ruht. (Auch lastet auf der Oberfläche der obersten Kruste am Meeresgrund der Druck der Wassersäulen.) Man hat bekanntlich vermutet, daß der allmählich tiefer sinkende Meeresgrund die leichtere Lava seitlich unter die Kontinente abdrängt und diese dadurch hochtreibt.

VII. Die Periode der Oberflächenwellen und die Dicke der obersten Erdkruste.

Rösener hat eingehend die Perioden des Maximums der Rayleighschen Wellen und der Nachläuferwellen für verschiedene Bebenherde nach den Göttinger Aufzeichnungen verglichen. Er fand, daß vorwiegend Wellen von 12 und 18 Sec. in diesen Phasen auftreten. Bei sibirischen Beben fand er eine Abhängigkeit von der Stärke des Bebens; für starke war die Periode 18 sec vorherrschend, für schwächere 12 sec. Bei nahe gleicher Herddistanz von Göttingen zeigen die mexikanischen Beben eine ausgesprochene Häufungsstelle der Perioden um 18 sec, die japanischen um 12 sec. Es scheint danach von Einfluß zu sein, ob der Weg unterm Atlantik (18 sec) oder asiatischen Kontinent verläuft (12 sec). Die

Rösenerschen Beobachtungen beweisen, daß die Perioden der langen Wellen und Nachläufer sicherlich nicht in erster Linie durch die Verhältnisse in der Nähe der Station bedingt sind, also nicht von Stationsschwingungen herrühren.

Es lassen sich deshalb sehr wohl die Perioden der Oberflächenwellen desselben Bebens an verschiedenen Stationen vergleichen. Im Folgenden wurden bei den von Roesener benutzten Beben die in Göttingen und Apia aufgezeichneten Perioden verglichen. Tabelle IX. Aus diesem Vergleich ergab sich, daß die Nachläuferwellen für Beben aus der Südsee in Apia eine Häufungsstelle um 11 sec, in Göttigen um 18 sec aufweisen. Andererseits ergab sich für Europabeben in Göttingen 12 sec und in Apia 18 sec, für amerikanische Beben in Apia sowohl wie in Göttingen 18 sec. Von asiatischen Beben zeigen besonders japanische in Göttingen kürzere Periode (12 sec) als in Apia (17 und 16 sec).

Es folgt hieraus: 1) Die Herddistanz übt einen Einfluß auf die Periode der Nachläuferwellen (in beschränktem Maße übrigens auch auf die Periode der Hauptphase) aus. Die näher gelegenen Stationen zeigen kürzere Perioden. Es mag sein, daß bei starken Beben, wie das Verhalten der oben erwähnten sibirischen Beben zeigte, neben den in der Nähe des Herdes stets auftretenden kürzeren Perioden von etwa 9—12 sec auch größere von etwa 18 sec erregt werden und daß bei stärkeren Beben auch tiefer liegende Schollen in Schwingung geraten. In der Nähe des Herdes mögen diese schwer aus den stärker hervortretenden Überlagerungen kürzerer Perioden herauszuschälen sein und darum der Messung entgehen. Wenn man eine der Deformationsgeschwindigkeit proportionale Reibung einführt, ergibt die Theorie der Rayleighwellen, daß die kürzere Periode stärker gedämpft wird.

An entfernteren Stationen verschwinden die kürzeren Perioden und die längeren treten hervor. Es deutet jedoch auch manches darauf hin, daß die längeren Perioden in der Hauptphase an den näheren Stationen keineswegs so intensiv und lang andauernd vorhanden sein können wie an entfernteren. Bei dem calabrischen Beben vom 8. IX. 1905 war das Maximum der Hauptphase in Göttingen, wenn man von der kurzen Vorphase sinkender Periode absieht, an eine Periode von 9—12 sec geknüpft. Die Amplitude sank in 9 min auf $\frac{1}{10}$ ihres Maximalwertes. In Samoa besaß das Maximum der Hauptphase eine Periode von etwa 18—20 sec. $\frac{1}{2}$ Stunde nach dem ersten Maximum war die Amplitude bei nur wenig verringerter Periode noch kaum vermindert. Die Nachläuferperiode war in Samoa 18 sec, in Göttingen 12 sec. Es hat

den Anschein, als ob die Wellen von 20—18 sec Periode in Samoa erst durch Eigenschwingungen der zwischen Calabrien und Samoa liegenden Erdschollen entstanden sind, und als ob diese Schollen durch Resonanz die ankommende Energie aufgespeichert haben und allmählich wieder ausstrahlen. Solche günstigen Bedingungen für das Entstehen von Perioden von 20—18 sec sind in den Schollen zwischen Calabrien und Göttingen offenbar nicht vorhanden.

Es folgt 2): Neben den Vorgängen im Herd und dem Einfluß der Herddistanz scheint auch die Beschaffenheit des Weges, ob unter dem Meere oder Kontinente, auf die Periodenlänge der Nachläufer zu wirken. So zeigen auch die amerikanischen Beben, deren Oberflächenwellen sowohl nach Göttingen wie nach Samoa im Mittel ungefähr gleich weite Wege unter Meeren durchlaufen, an beiden Stationen Perioden von etwa 18 sec. Die japanischen Beben zeigen dagegen kürzere (Göttingen 12 sec), oder längere Wellen (Apia 16.5 sec), je nachdem sie durch den asiatischen Kontinent oder unter dem pazifischen Ozean gelaufen sind. Ähnlich, wenn auch in geringerem Maße, sind die Nachläufer-Wellen des oben benutzten Kamtschatka-Bebens in Tiflis kleiner als in Samoa. Man muß also den Schollen, die zwischen Herd und Stationen liegen, einen wesentlichen Anteil an der Bildung der Periode der in der Station aufgezeichneten Nachläuferwellen zuschreiben, und zwar liefern die asiatischen Kontinentalschollen kleinere Periode als die pazifischen. Nimmt man nun mit Wiechert an, daß es sich hierbei um Eigenschwingungen der festen obersten Erdkruste bis zu einer darunter liegenden sehr nachgiebigen Magmaschicht handelt, so müßte die Dicke dieser Schicht gleich einer halben Wellenlänge der Grundschwingung der Scherungswellen sein.

Es ließe sich dann die Dicke D dieser Schicht unter Ozean und Kontinent berechnen. $D = \frac{T}{2} b$, wo b die Geschwindigkeit der Querschwingungen, T die Periode derselben bedeutet. Setzen wir für b und T die Werte, die wir für den asiatischen Kontinent und Pazifik gefunden haben: $b_{Ko} = 3.87$ km/sec, $b_{Oz} = 4.68$ km/sec. Die Periode T ergibt sich wohl am sichersten aus den Nachläuferwellen. Das Kamtschatka- und das Kurilenbeben ergab für Apia und Tiflis im Mittel für T_{Oz} 18.5 sec, für T_{Ko} 15.2 sec, die Japanbeben ergaben für Apia und Göttingen 16.5 sec und 12.0 sec.

Setzen wir hiernach (unter Berücksichtigung der Gewichte der Messungen) $T_{Oz} = 17.5$ sec und $T_{Ko} = 14.5$ sec, so erhalten wir für eine mittlere Dicke der obersten Erdkruste unterm Pazifik 41 km, unterm asiatischen Kontinent 28 km.

Die Verfrühung des zweiten Vorläufers der Tongabeben in Apia zeigte die stärkste Abweichung der Laufzeit gegenüber der Laufzeit kontinentaler Beben bei 6^0 Herddistanz. Bei größeren Herddistanzen war diese Differenz geringer. Wenn man annimmt, daß die größere Geschwindigkeit unterm Ozean von einer höheren Righeit herrührt, die der obersten Kruste unterm Ozean bis zu einer nachgiebigen Magmaschicht zukommt, so ergibt sich die Dicke dieser Kruste gleich der Scheiteltiefe der IIten Vorläuferwellen, die noch ganz in ihr verlaufen und bei $\Delta = 6^0$ auftauchen, nämlich zu etwa 50 km. Diese Dicke stimmt gut mit der oben aus den Oberflächenwellen gefundenen Dicke von 41 km überein.

VIII. Die oberste Erdschicht nach den Schweremessungen und nach ihrem seismischen Verhalten.

Die Resultate der Schwerebeobachtungen deuten darauf hin, daß das Erdinnere im Wesentlichen nach den Gesetzen der Hydrostatik geschichtet ist, besonders in größeren Tiefen, wo hohe Drucke herrschen. Abweichungen hiervon finden sich daher nur in einer äußeren Schale der Erde, der Kruste. Wenn die Dicke dieser Kruste nach Helmert auf 120 km angenommen wird, so umfaßt sie alle Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht im Erdinnern, die sich an der Oberfläche als Schwerestörungen offenbaren. In 120 km Tiefe liegt dann eine Ausgleichfläche, auf deren Flächenelementen gleich große Massen lagern, sodaß in diesem Niveau vollkommen hydrostatisches Gleichgewicht herrscht, Isostasie. Die linearen Dimensionen dieser Flächenelemente hat man zu einigen hundert Kilometern anzunehmen. Es soll hierbei erwähnt werden, daß nach anderen Versuchen schon eine Ausgleichfläche in 44 bis 60 km Tiefe genügt. Eine wichtige Bestätigung dieser Isostasie kann man darin erblicken, daß die Schwerkraft selbst über den großen Tiefen der Ozeane wesentlich denselben Betrag hat wie auf den Flachländern der Kontinente. Das größere Volumen der Kontinentalblöcke wird durch ihre geringere Dichte ausgeglichen. Unter den Meeren ist ein Massenüberschuß, der das geringere Gewicht des Meerwassers kompensiert. Die geringere Dichte der Kontinente und Gebirge entstand nach Pratt dadurch, daß bei der Erstarrung der Erde diese Massen sich ausdehnten, während andere Massen, die jetzt den Meeresgrund bilden, sich zusammenzogen und sanken. H. Faye glaubt, daß unter dem Meere die Abkühlung der Erdrinde wegen des darüberlagernden Wassers rascher erfolgte als unter den schlechter leitenden, von Luft begrenzten Konti-

nenten, und daß daher die Erdrinde unter dem Meere dicker als unter der Oberfläche der Festländer ist.

Unsere seismischen Beobachtungen bestätigen die obigen Anschauungen in gewisser Hinsicht.

I. Die Störungen des hydrostatischen Gleichgewichtes und damit die Beanspruchung der Elastizität und Festigkeit der Kruste zur Herstellung eines elastischen Gleichgewichtes sind nur bis zur Tiefe der Ausgleichfläche zu erwarten. Brüche und Risse durch zu große Beanspruchung der Elastizität der Kruste, wie sie im Herde tektonischer Erdbeben eintreten mögen, können danach nicht tiefer gehen. Sie sind dort zu erwarten, wo nahe benachbarte positive und negative Schwerestörungen auf Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes und elastische Beanspruchung der Kruste deuten. Im Pazifik befindet sich die markanteste Störung dieser Art in der Nähe der Tongarinne, und zwar ist die Schwere über der Tongarinne um 0.25 cm zu klein; es ist dort also ein starker Massendefekt vorhanden. Das westlich daran grenzende Tongaplateau besitzt im Gegensatz hierzu eine um 0.17 cm zu große Schwere, also einen erheblichen Massenüberschuß. Die elastische Beanspruchung in der Erdrinde muß also als Druck von West nach Ost, vom Tongaplateau gegen die Westseite der Tongarinne gerichtet sein. An der Westseite der Tongarinne liegen in der Tat ausnahmslos die Herde der Tongabeben.

II. Unterhalb der Ausgleichfläche kann man im selben Niveau keine Unterschiede in Dichte, Druck oder im elastischen Verhalten erwarten. Solche Unterschiede können nur oberhalb der Ausgleichfläche auftreten. Nur der Teil der Laufstrahlen seismischer Wellen, der oberhalb der Ausgleichfläche verläuft, kann dadurch beeinflußt werden. Für große Herddistanzen sind also nur geringe Differenzen der Laufzeiten der Vorläuferwellen nach verschiedenen Azimuten (z. B. unter dem Kontinent und unter dem Meere) zu erwarten, weil dann nur ein geringer Teil des Laufstrahls oberhalb der Ausgleichfläche liegt. Für geringe Herddistanzen und für Oberflächenwellen sollten Unterschiede vorhanden sein. Wir sahen, daß sich dies bestätigt hat.

III. Die Denudation entlastet Kontinente und belastet die Meere. Dies und die größere Abkühlung der Schichten unter dem Meere sollten eine größere Dicke der Kruste unter dem Meere zur Folge haben. Die Beobachtungen an Oberflächenwellen bekräftigen diese Anschauung.

IX. Zusammenfassung.

1) Bei einem sehr starken Tongabeben waren 8 min nach Ende der Erschütterungen von der Stärke VIII keine Neigungswellen vom Betrage 2″ vorhanden.

2) Die Epizentren der Tongabeben, 12 Großbeben und 77 vom Charakter III und II, liegen alle auf dem Tongaplateau westlich der Tongarinne.

3) Die Laufzeiten für P und S sind unter dem Pazifik bei 6^0 Herddistanz um 13 sec und 25 sec kleiner als unter dem Kontinent Europa. Dem entspricht für S eine um 18 % größere Geschwindigkeit unter dem Ozean.

4) P läßt sich bis $\Delta = 145^0$ verfolgen. Die Laufzeit von P ist dort 1040 sec; von P P zweigt sich bei 100^0 ein Wellenzug ab, der sich bis 177^0 verfolgen läßt.

5) Die Geschwindigkeit der Hauptwellen ist unter dem Pazifik um 21—26 % größer als unter dem asiatischen Kontinent.

6) Die Dämpfung der Hauptwellen ist unter dem Pazifik größer als unter Asien.

7) Die Periode der Nachläuferwellen ist unter dem Pazifik größer als unter Asien.

8) Sind die Nachläuferwellen Eigenschwingungen der obersten Kruste, so ist diese unter dem Pazifik 41 km dick; unter dem asiatischen Kontinent 28 km.

9) Die Ergebnisse der Schweremessungen führen zu Anschauungen über die oberste Erdkruste, die die obigen aus dem seismischen Verhalten abgeleiteten bestätigen.

Für ihre Hilfe bei der Ausführung dieser Arbeit bin ich meiner Frau und Herrn E. Demandt besonders für seine Zeichnungen Dank schuldig.

Tabelle I.
Liste der Beben für die Laufzeitkurven und Karte.

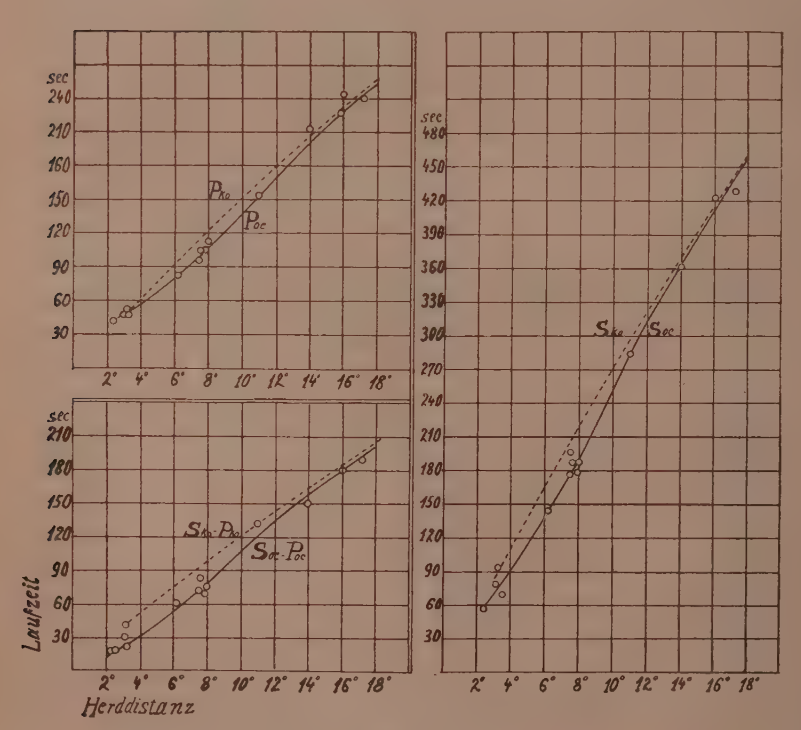
No. in der Karte	Datum	Herdzeit	Herd
1.	2. I. 1907	11h 55m 40s	21.0 S 175.0 W Tongarinne
2.	31. III. 1907	22 59 38	21.0 S 174.2 W „
3.	31. V. 1907	12 42 39	20.0 S 176.8 W „
5.	26. VI. 1913	4 57 3	21.0 S 174.0 W „
	28. VII. 1913	5 39 20	17.5 S 74.5 W Peru
	6. VIII. 1913	22 14 14	18.0 S 73.0 W „
	3. IX. 1913	20 51 10	6.5 153.5 W Salomons In.
	10. XI. 1913	21 12 10	18.0 S 170.0 E Neue Hebriden
	11. IV. 1914	16 29 30	16 S 168 E „
	26. V. 1914	14 22 40	0.3 S 138.8 E Neu Guinea
	26. VI. 1914	4 50 8	13 0 S 166.8 E Neue Hebriden
	6. X. 1914	19 16 3	32.5 S 182.0 W Tongarinne
6.	20. XII. 1914	14 8 43	16.5 S 173.5 W „
	5. I. 1915	14 32 38	16.5 S 168.5 E Neue Hebriden
	6. VI. 1915	21 28 46	19.0 S 69.0 W Chile
	27. II. 1916	20 20 36	10.5 N 91.0 W Westküste v. Mittelamerika
	21. VI. 1916	21 32 33	17.0 S 57.0 W Brasilien
	3. VIII. 1916	1 30 2	4.0 S 144.5 E Neu Guinea
7.	11. X. 1916	18 5 30	15.1 S 175.0 W Tongarinne
8.	20. X. 1916	17 4 37	16.0 S 173.1 W „
9.	1. V. 1917	18 26 45	26.5 S 177.5 W „
10.	26. VI. 1917	5 49 23	16.0 S 173.0 W „
11.	16. XI. 1917	3 19 28	29.8 S 178.7 W „
12.	30. IV. 1919	7 16 48	19.5 S 173.0 W „
4.	10. IV. 1909	5 27 3	16.0 S 174.0 W „
	28. X. 1914.	0 16 20	37.5 S 180.0 W „

Tabelle II.
Herddistanzen, Laufzeiten und Azimute nach Apia, (Wellington und Christchurch) für die Großbeben von der Tongarinne.

Datum	Station	Δ	P	S	S—P	Azimut aus der Herdlage	Azimut aus $\frac{A_E}{A_N}$
		0	sec	sec	sec		
2. I. 1907	Apia	7.9	107	177	70	S 25° W	S 15° W
31. III. 1907	„	7.5	95	177	82		
31. V. 1907	„	8.0	112	187	75	40	25
10. IV. 1909	„	3.1	49	(79)	(30)	47	52
26. VI. 1913	„	7.6	106	188	82	17	25
6. X. 1914	„	21.0	315				
„	Christch.	11.0	153	285	132		
28. X. 1914	„	7.5		196			
20. XII 1914	Apia	3.2	53	93	40	34	32
11. X. 1916	„	3.3	48	68	20	72	66
20. X. 1916	„	2.5			18		
1. V. 1917	„	14.0	214	363	149	24	20
„	Wellingt.	16.0	243	423	180		
26. VI. 1917	Apia	2.4	42	58	16	30	29
16. XI. 1917	„	17.2	240	428	188		
30. IV. 1919	„	6.2	84	144	60	13	20
						Mittel 33°.6	31°.6

Tabelle IIIa.
Laufzeiten.

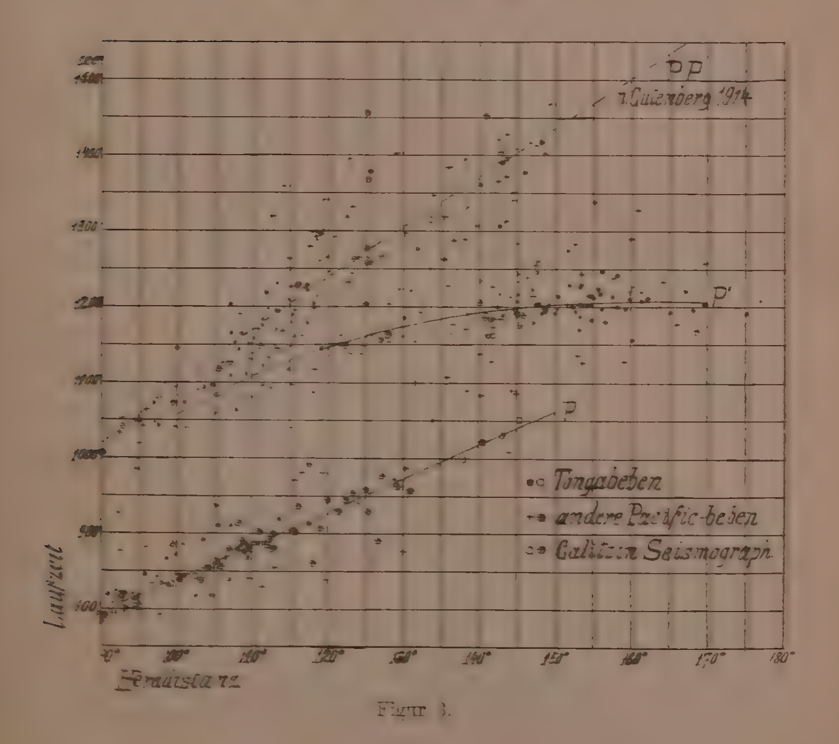
Δ	P	S	$P_{Ko} - P_{Oc}$	$S_{Ko} - S_{Oc}$
3°	47sec	70sec	− 1	+ 14
4	57	92	+ 3	+ 19
5	68	114	+ 9	+ 24
6	78	138	+ 14	+ 27
7	93	165	+ 14	+ 27
8	108	193	+ 14	+ 25
9	122	220	+ 14	+ 24
10	137	253	+ 14	+ 17
11	153	285	+ 13	+ 10
12	169	315	+ 10	+ 5
13	184	341	+ 8	+ 3
14	202	366	+ 4	+ 2
15	217	390	+ 2	+ 2
16	230	414	+ 2	+ 1
17	242	436	+ 2	+ 1
18	255	460	+ 2	+ 0



Figur 2.

Tabelle IIIb.

Δ	P	P′
90°	796 sec	sec
95		
100	840	1057
105		1085
110	884	1109
115		1130
120	928	1147
125		[illegible]
130	973	1174
135		[illegible]
140	1018	[illegible]
145		[illegible]
150	1063	[illegible]
155		1205
160		1206
165		1206
170		1206



Figur 3.

Tabelle IV.
Daten zur Herdberechnung.
1. Mai 1915.
Herdzeit $5^h 59^m 55^s$; Herd 49°.0 N 154°.0 E. Kurilen.

I.	*P* beob.	*Δ*	Laufzeit	*P* ber.	*P* beob.-ber.
Irkutsk	6m 29s	31°.7	405s	6m 40s	—11s
Jekaterinburg	9 26	53.7	572	9 27	— 1
Pulkowa	10 36	64.2	639	10 34	+ 2
Baku	11 08	69.7	676	11 11	— 3
Tiflis	11 26	71.8	687	11 22	+ 4
Eskdalemuir	11 49	75.2	710	11 45	+ 4
				Mittel	—1.0
II.					
Zikawei	6m 21s	30°.5	393s	6m 28s	— 7s
Taihoku	7 06	34.7	431	7 6	+ 0
Manila	8 14	44.5	509	8 24	—10
Batavia	11 13	69.5	674	11 9	+ 4
Samoa	11 16	69.8	676	11 11	+ 5
Riverview	12 18	81.0	740	12 15	+ 3
				Mittel	—1.0
III.					
Berkeley	9m 58s	59°.0	605s	10m 0s	— 2s
St. Klara	10 10	60.5	617	10 12	+ 0
St. Louis	11 55	77.0	717	11 52	+ 3
Ottawa	11 56	78.3	724	11 89	— 3
				Mittel	—0.5

31. Juli 1915.
Herdzeit; $1^h 31^m 14^s$; Herd: 55°.0 N 162°.0 E. Kamtschatka.

I.	*P* beob.	*Δ*	Laufzeit	*P* ber.	*P* beob.-ber.
Irkutsk	38m 12s	34°.0	425s	38m 19s	— 7s
Jekaterinburg	40 38	52.3	562	40 36	+ 2
Pulkowa	41 34	60.0	612	41 26	+ 8
Baku	42 22	69.7	675	42 29	— 7
Tiflis	42 43	71.0	683	42 37	+ 6
				Mittel	+0.4
II.					
Zikawei	38m 38s	37°.8	456s	38m 50s	—12s
Manila	40 36	51.5	556	40 30	+ 6
Samoa	42 49	71.8	687	42 41	+ 8
Riverview (Sydney)	44 18	89.0	792	44 26	— 8
				Mittel	—1.5
III.					
Berkeley	40m 40s	52°.8	565s	40m 39s	+ 1s
St. Klara	40 35	53.8	572	40 46	—11
Ottawa	42 32	69.6	674	42 28	+ 4
				Mittel	—2.0

Tabelle V.

Kurilenbeben.

1. Mai 1915.

Apia.

Phase	Greenwich Zt.	Periode	A_N	A_E	A_Z	
			(μ)	(μ)	(μ)	
P	5^h 11^m 16^s					
iS	20 9					
iL_Q	27 39					nur in EW
iL_R	30 44	37	1430			
$M_{N,1}$	31 21	31	1760		600	
	52	27	1170			
	32 19	23	1320		750	
	42	23	1450			
	33 05	23	1220	580		
	28	23	940			
	51	23	890			
	34 14	22	920			
	36	19	1050			
$M_{N,2}$	55	21	1060	650		
	35 16	20	860			
	37	21	760			
	57	20	760			
	36 17	20	660			
	38	21	680			
	58	20	230			
	38	16	75			
	39	16	104			
	40	15	112			
	41	16 u. 20	210	300		
	42	16	156			
	43	18	390			
	44 48	19	540			
$M_{N,3}$	45 07	18	700			
	25	18	650		400	
	43	16	530			
	59	15	335			
	46 14	16	320			
	30	15				

Tiflis.

Phase	Greenwich Zt.	Periode	A_N	A_E	A_Z	
			(μ)	(μ)	(μ)	
iP	$5^h\ 11^m\ 26^s$					
iS	20 52					
L	32					
	40 00	29	+ 2824			+ bedeutet nach N oder E
$M_{N,1}$	17	31.5	— 3541			
$M_{O,1}$	18	25.4		— 1458		
	41 26	26.0	+ 2050			
	43 27	24.2	+ 1162			
	45 03	24.0			— 766	
	18	24.0			+ 822	
	27	24.0			— 780	
	46 05	20.0		+ 1896		
	47 11	20.0		— 2791		
$M_{O,2}$	20	19.4		+ 3052		
	30	19.4		— 2917		
	58	20.2	— 1096			
	48 15	19.4		— 1717		
$M_{N,2}$	48 46	20.2	+ 1125			
	51 14	20.2	+ 852			
	26	20.2	— 794			
	53	17.4		— 855		
	54 32	19.2			— 538	
	55 31	18.4			— 553	
	48	20.0		+ 415		
$M_{N,3}$	55	18.0	+ 332			
	57 52	17.0			— 293	
	59	18.4		— 477		
	59 49	16.4			— 300	
	61 42	17.4			— 128	
	62 24	16.4			+ 112	
	57	16.0			— 130	
	64 42	16.4			+ 151	
	65 14	14.0			+ 90	

Tabelle VI.

Kamtschatkabeben.

31. Juli 1915.

Apia.

Phase	Greenwich Zt.	Periode	A_N	A_E	A_Z
			(μ)	(μ)	(μ)
P	1h 42m 49s				
iS	52 04				
iL_Q	2 00 00	nur in EW			
L_E	01 —				
M	3 49	37	320	103	
	4 07	32	285		150
	4 26	28	250		
		14		80	
	44	27	275		
$M_{N,1}$	5 11	25 u. 22	360		150
	36	24.5 u. 22	310		135
	6 00	21	215		
	21	21	220		
	42	23	250		
$M_{N,2}$	7 5	23	250		
	28	18	120		
	46	23	175		
	8 9	19	150		
	28	19	135		
	47	16	80		
	9 13	19	135		
	32	21	180		
	53	18	120		
	10 11	20	180		
	31	18	140		
	49	18	150		120
	11 07	18	100		
	25	16	85		
	41	18	110		
	12 09	18	110		
	27	21	145		
	48	18	120		
	13 05	17	105		
	23	18	120		
	44	21	155		
	14 05	21	100		
	23	18	65		
	16	20		50	

Tiflis.

Phase	Greenwich Zt.	Periode	A_N	A_E	A_Z
		(μ)	(μ)	(μ)	(μ)
iP	1h 42m 43s				
iS	52 09				
L	2 07 —				
	11 36	27.0		+944	
$M_{N,1}$	48	26.4	—1133	—918	
	12 00	24.0		+886	
$M_{N,2}$	48	23.0	+712		
	15 30	20.0			—134
	44	20.4		+463	
	16 42	22.0	+520		
	17 19	25.0			—260
	18 14	19.0		—766	
	24	18.0		+801	
	32	21.2	+883		
	34	18.0		—771	
	39	20.0	—819		
	51	20.0	—819		
	20 08	21.0			+263
	23	17.6	+460		
	21 49	17.2			—134
	22 55	17.2	—234		
	23 01	14.0			+91
	24 25	17.0		+290	
	24 53	14.2			—54
	27 54	15.0			+34

Tabelle VII.

Kurilenbeben.

1. Mai 1915 5h 59m 55s.

Apia. Herddistanz: 7750 km.

Phase	Periode	Ankunftzeit			Laufzeit	V	A_N	A_E	A_Z
	s	h	m	s	s	km/sec	μ	μ	μ
L_Q		5	27	39	1654	4.70			
L_E	37		30	44	1839	4.23			
$M_{N,1}$	31		31	21	1876	4.15	1760	580	750
$M_{N,2}$	21		34	55	2090	3.73	1060		
$M_{N,3}$	18		45	07	2702	2.88	700		

Riverview. Herddistanz: 9000 km.

Phase	Periode	h	m	s	Laufzeit	V	A_N	A_E	A_Z
M_1	23		40	18	2413	3.74			
M_2	21		43	20	2595	3.48	626	435	402

Tiflis. Herddistanz: 7970 km.

Phase	Periode	h	m	s	Laufzeit	V	A_N	A_E	A_Z
L_Q		5	32	—	1915	4.16			
$M_{N,1}$	31.5		40	17	2412	3.30	3541	3052	822
$M_{O,2}$			47	20	2835	2.81			
$M_{N,2}$	20.2		48	46	2921	2.74	1125		
$M_{N,3}$	18		55	55	3350	2.39	332		

Tabelle VIII.

Kamtschatkabeben.

31. Juli 1915 $1^h 31^m 14^s$.

Apia. Herddistanz: 7970 km.

Phase	Periode	Ankunftzeit			Laufzeit	V	A_N	A_E	A_Z
	s	h	m	s	s	km/sec	μ	μ	μ
L_Q		2	00	00	1726	4.65			
L_R			01	00	1786	4.48			
M	37		03	49	1955	4.09			
$M_{N,1}$	25		5	11	2037	3.93	360	103	150
$M_{N,2}$	23		6	42	2128	3 75	250		
Riverview. Herddistanz: 9880 km.									
L		2	7	18	2164	4.58			
$M_{N,1}$	21		16	55	2741	3.61	172	80	87
Tiflis. Herddistanz: 7880 km.									
L_Q		2	07	—	2174	3.58			
$M_{N,1}$	26.4		11	48	2430	3.24	1133	944	
$M_{N,2}$	23 0		12	48	2490	3.18	712		260
Pulkowa. Herddistanz: 6660 km.									
L	?	1	58	0	1634	4.09			
M_N	?	2	6	15	2129	3.14			

Tabelle IX.

Perioden der Hauptphase und Nachläuferwellen in Apia und Göttingen.

I. Südsee.

Datum	Herd	Samoa		Göttingen	
		L, M	C	L, M	C
		s	s	s	s
12. VI. 1905	Gilbert In.	10	10	18—24	18
14. „ „	südl. v. Rarotonga	17 u. 9	10 u. 5		18
30. „ „	östl. v. Salomo In.	17. u. 11	11	18—24	18
17. VII. „	Tongarinne	14	10	18—24	18
14. IV. 1906	Neue Hebriden	15, 11	9		18
1. VI. „	Neu Guinea	27, 14, 18	14—18	18	18
14. IX. „	Bismarck-Arch.	20, 15	14, 10		18
2. X. „	„	33—26 15	14, 12	18, 19	18
30. III. 1910	Gilbert Inseln	15	12		18
14. XI. 1906	östl. v. Neu-Caledon.	24, 8, 12	6, 12	50—42, 24	18
		Mittel	11		18

II. Asien.

Datum	Herd	Samoa		Göttingen	
		L, M	*C*	*L, M*	*C*
6. VII. 1905	Südl. von Japan	19	17	18	12 u. 13
9. „ „	Mongolei	60—30	16	40	18
23. „ „	„	60—41	22—16	40	18
15. IX. „	Kamtschatka	28, 19	18	30	18
				17—18	12—20
21. I. 1906	Japan	30, 18	17	12, 12	12
19. VI. 1906	Philippinen	25, 17		40, 30	12
17. X. 1906	„	31, 16	12	40—25	12
				20, 15	
7. IX. 1906	Japan	27, 17, 19	16	30, 22	12, 13
				19, 15	15
12. VII. 1911	Philippinen	28, 20, 19		17, 18	12
13. X. 1911	Sachalin	20	16	12—18	12
14. X. 1911	Aleuten	24, 25, 20		12—18	12
		Mittel	16		14

III. Europa.

Datum	Herd	Samoa *L, M*	Samoa *C*	Göttingen *L, M*	Göttingen *C*
8. IX. 1905	Calabrien	52—36			
		21; 19, 18	18	10—15, 9	12
19. III. 1906	Isl.-Grönl.	22	20—18	19	10, 11, 12
		Mittel	18		11

IV. Amerika.

Datum	Herd	Samoa *L, M*	Samoa *C*	Göttingen *L, M*	Göttingen *C*
3. III. 1906	Antillen	19	19	30, 16	15, 17.5
31. I. „	Ecuador	19, 16	15, 19	18	18
18. IV. „	S. Francisco	57, 11, 9	16	60, 35	18
		8.5, 17		30, 22, 20	
17. VIII. 1906	Chile	55, 12, 24, 19	14, 18	18, 22, 17	17, 18
		20, 18, 15			
19. VII. 1906	„	28, 18, 15		18	17, 18
30. VIII. 1906	„	27, 17, 15		18	18, 17
15. IV. 1907	Mexiko	20, 18, 19	17, 18	18	18
30. VII. 1909	„	38		34	
		19, 17		21, 18, 24	18
		Mittel	17		17

Über die Gaussschen Summen.

Von

J. Schur in Berlin.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Februar 1921.

Im folgenden will ich zeigen, daß die Gaußsche Summenformel

$$(1) \qquad g = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i \nu^2}{n}} = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n} \qquad (n \text{ ungerade})$$

sich überraschend leicht mit Hilfe der einfachsten Regeln des Matrizenkalküls beweisen läßt. Auf diesem Wege ergibt sich zugleich ein nicht uninteressanter Zusammenhang zwischen den allgemeineren Gaußschen Summen

$$(2) \qquad g(a, n) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i a \nu^2}{n}} = \left(\frac{a}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n} \qquad ((a, n) = 1)$$

und einem bekannten Satz von Zolotareff über das Legendresche Symbol, der von Herrn Lerch auch auf das Jacobische Symbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ übertragen worden ist. Eine ähnliche Deutung läßt auch eine von H. Weber herrührende Formel über mehrfache Gaußsche Summen zu.

§ 1. Setzt man zur Abkürzung $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so wird

$$s_m = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\nu m}$$

gleich n oder gleich 0, je nachdem m durch n teilbar ist oder nicht. Hieraus folgt in bekannter Weise für ein ungerades n

$$|g|^2 = \sum_{\mu,\nu}{}_0^{n-1} \varepsilon^{\nu^2 - \mu^2} = \sum_{\lambda,\mu}{}_0^{n-1} \varepsilon^{(\lambda+\mu)^2 - \mu^2} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \varepsilon^{\lambda^2} s_{2\lambda} = n.$$

Ich betrachte nun die Matrix n-ten Grades

$$M = (\varepsilon^{\varkappa\lambda}), \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Der Ausdruck g ist nichts anderes als die Spur von M, also gleich der Summe der n charakteristischen Wurzeln ω_ν von M. Um die ω_ν zu berechnen, bilde ich die Potenzen von M. Es wird insbesondere

$$(3) \qquad M^2 = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\varkappa\nu+\nu\lambda}\right) = (s_{\varkappa+\lambda}),$$

$$(4) \qquad M^4 = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} s_{\varkappa+\nu}\, s_{\nu+\lambda}\right) = n^2 E,$$

wobei E die Einheitsmatrix bedeutet. Da nun bekanntlich die charakteristischen Wurzeln von M^k für jedes ganzzahlige k mit den k-ten Potenzen der Wurzeln von M übereinstimmen, so folgt aus (4) $\omega_\nu^4 = n^2$, jede der n Größen ω_ν ist also von der Form $i^\alpha \sqrt{n}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$. Ist nun m_α der Vielfachheitsgrad der Wurzel $i^\alpha \sqrt{n}$, so wird

$$g = \sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_\nu = \sqrt{n}\,[m_0 - m_2 + i(m_1 - m_3)].$$

Dieser Ausdruck kann nur dann der Gleichung $|g|^2 = n$ genügen, wenn er von der Form $g = \sigma\zeta\sqrt{n}$ ist, wo $\sigma = \pm 1$ und ζ gleich 1 oder i zu setzen ist. Beachtet man noch, daß die Spur $\sum \omega_\nu^2$ von M^2 wegen (3) gleich $\sum s_{2\nu}$, also für ein ungerades n gleich n ist, so erhält man die vier Gleichungen

$$\sum m_\alpha = n, \quad \sum m_\alpha i^\alpha = \sigma\zeta, \quad \sum m_\alpha i^{2\alpha} = 1, \quad \sum m_\alpha i^{-\alpha} = \sigma\zeta^{-1}$$
$$(\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Hieraus ergibt sich

$$(5) \qquad \begin{cases} 4m_0 = n+1+\sigma(\zeta+\zeta^{-1}), & 4m_1 = n-1+\sigma i(\zeta^{-1}-\zeta), \\ 4m_2 = n+1-\sigma(\zeta+\zeta^{-1}), & 4m_3 = n-1-\sigma i(\zeta^{-1}-\zeta). \end{cases}$$

Damit nun die rechtsstehenden Ausdrücke durch 4 teilbare ganze Zahlen werden, muß $\zeta = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$, d. h. gleich 1 oder gleich i sein, je nachdem $n \equiv 1$ oder $n \equiv -1$ (mod. 4) ist. Es kommt also nur noch darauf an, zu zeigen, daß das Vorzeichen σ gleich $+1$ zu wählen ist [1]).

---

1) Daß g jedenfalls von der Form $\pm i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n}$ sein muß, läßt sich bekanntlich auch direkt ohne besondere Mühe beweisen. Doch wollte ich auch dieses nicht als bekannt voraussetzen.

Dies ergibt sich aber recht einfach, indem man die Determinante $\Delta = |\varepsilon^{\varkappa\lambda}|$ der Matrix M auf zwei verschiedene Arten berechnet. Einerseits ist nämlich Δ gleich dem Produkt der charakteristischen Wurzeln von M, also

$$\Delta = n^{\frac{n}{2}} . i^{m_1 + 2m_2 - m_3}.$$

Dies läßt sich, wie aus den Formeln (5) folgt, in der Form

$$\Delta = n^{\frac{n}{2}} . i^{\frac{n+1}{2} - n\sigma}$$

oder wegen $i^\sigma = \sigma i$ auch in der Form

(6) $$\Delta = n^{\frac{n}{2}} . \sigma i^{\frac{1-n}{2}} = n^{\frac{n}{2}} . \sigma i^{\frac{n^2-n}{2}}$$

schreiben. Andererseits ist aber

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ . & . & \dots & . \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \dots & \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = \prod_{\varkappa > \lambda}{}_0^{n-1} (\varepsilon^\varkappa - \varepsilon^\lambda),$$

also

$$\Delta = \prod_{\varkappa > \lambda} e^{\frac{\pi i(\varkappa+\lambda)}{n}} \left(e^{\frac{\pi i(\varkappa-\lambda)}{n}} - e^{\frac{\pi i(\lambda-\varkappa)}{n}} \right) \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$= e^{\frac{\pi i}{n} \sum_{\varkappa > \lambda} (\varkappa+\lambda)} \prod_{\varkappa > \lambda} 2i \sin \frac{\pi(\varkappa-\lambda)}{n}.$$

Die Summe $\sum_{\varkappa > \lambda} (\varkappa+\lambda)$ hat aber den Wert $\frac{n(n-1)^2}{2}$, ist also für unser ungerades n durch $2n$ teilbar. Daher wird

$$\Delta = i^{\frac{n^2-n}{2}} \prod_{\varkappa > \lambda} 2 \sin \frac{\pi(\varkappa-\lambda)}{n}.$$

Da nun die hier auftretenden Sinuswerte sämtlich positiv sind und jedenfalls $|\Delta| = n^{\frac{n}{2}}$ ist, so erhalten wir

(7) $$\Delta = n^{\frac{n}{2}} . i^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

Vergleicht man dies mit der Formel (6), so erhält man die zu beweisende Gleichung $\sigma = 1$.

§ 2. Betrachtet man, wenn a irgend eine zu n teilerfremde ganze Zahl bedeutet, an Stelle von M die Matrix $M_a = \left(e^{\frac{2\pi i a \varkappa \lambda}{n}}\right)$, so liefert (für ein ungerades n) genau dieselbe Überlegung die beiden Formeln

$$g(a, n) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i a \nu^2}{n}} = \sigma_a i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n},$$

$$\Delta_a = \left| e^{\frac{2\pi i a \varkappa \lambda}{n}} \right| = \sigma_a n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n^2-n}{2}},$$

wobei $\sigma_a = \pm 1$ ist. Die zweite Formel läßt sich nun wegen (7) auch in der Form

$$\Delta_a = \sigma_a \Delta_1 \tag{8}$$

schreiben. Ist nun aber $a_\varkappa$ der kleinste nichtnegative Rest von $a\varkappa$ nach dem Modul n, so geht die Determinante Δ_a aus Δ_1 hervor, indem man die Zeilen von Δ_1 der Permutation

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

unterwirft. Weiß man demnach, was sich ja bekanntlich mit Hilfe der Gaußschen Summenformel (1) ohne Mühe beweisen läßt, daß σ_a mit dem Jacobischen Symbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ übereinstimmt, so liefert die Formel (8) den Zolotareff-Lerchschen Satz [1]): „Das Jacobische Symbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ ist gleich 1 oder -1, je nachdem die Permutation P_a gerade oder ungerade ist.“ Umgekehrt folgt aus diesem Satz die Gleichung $\sigma_a = \left(\frac{a}{n}\right)$, also auch die verallgemeinerte Summenformel (2).

§ 3. Ist

$$\varphi = \sum_{\alpha, \beta}{}_1^k a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha})$$

eine quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Determinante D von Null verschieden ist, so gilt, wie zuerst

---

1) Vgl. P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie (erster Teil), Leipzig 1902, S. 280—282.

H. Weber[1]) bewiesen hat, für jedes zu D teilerfremde positive ungerade n die Formel

$$(9)\qquad G_\varphi = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_k} e^{\frac{2\pi i}{n}\sum_{\alpha,\beta}^{k} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta} = \left(\frac{D}{n}\right) n^{\frac{k}{2}} i^{k\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Hierbei soll jede der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ein vollständiges Restsystem mod. n durchlaufen. Diese wichtige Formel läßt sich, wie Herr C. Jordan[2]) und H. Minkowski[3]) gezeigt haben, recht einfach mit Hilfe einer Transformation der Variabeln auf den Fall

$$\varphi = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_k x_k^2$$

zurückführen, in dem sie unmittelbar aus der Summenformel (2) folgt. Man kann sie aber aus einem Satz folgern, der eine Verallgemeinerung des Zolotareff-Lerchschen Satzes darstellt:

Man betrachte eine ganzzahlige lineare Transformation

$$(c)\qquad x'_\alpha = c_{\alpha 1} x_1 + c_{\alpha 2} x_2 + \cdots + c_{\alpha k} x_k,$$

deren Determinante $D = D_c$ von Null verschieden ist. Ist n eine zu D teilerfremde positive ganze Zahl, so erfahren die $N = n^k$ Wertsysteme

$$(10)\qquad (x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad (x_\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1)$$

wenn man auf die $x_\varkappa$ die Substitution c anwendet und die $x'_\varkappa$ mod. n reduziert, eine gewisse Permutation P_c. Für ein ungerades n ist diese Permutation gerade oder ungerade, je nachdem das Jacobische Symbol $\left(\frac{D}{n}\right)$ gleich 1 oder gleich -1 ist.

Der Beweis läßt sich folgendermaßen erbringen: Für je zwei Substitutionen a und b ist offenbar

$$P_{ab} = P_b P_a \text{ und } \left(\frac{D_{ab}}{n}\right) = \left(\frac{D_a}{n}\right)\left(\frac{D_b}{n}\right).$$

Ist der Satz für a und b einzeln richtig, so gilt er also auch für ab. Nun läßt sich aber bekanntlich jede ganzzahlige Substitution c aus „elementaren“ Substitutionen der Form

---

1) Über die mehrfachen Gaußischen Summen, Journ. f. Math. Bd. 74 (1872), S. 14—56.

2) Sur les sommes de Gauß à plusieurs variables, C. R. Bd. 73 (1871), Seite 1316—1319.

3) Werke Bd. I, S. 45 ff.

$$(c_1)\quad x'_\alpha = x_\alpha,\quad x'_\varkappa = a x_\varkappa \qquad (\alpha \neq \varkappa)$$
$$(c_2)\quad x'_\alpha = x_\alpha,\quad x'_\varkappa = x_\varkappa \pm x_\lambda \qquad (\alpha \neq \varkappa)$$
$$(c_3)\quad x'_\alpha = x_\alpha,\quad x'_\varkappa = x_\lambda,\ x'_\lambda = x_\varkappa \qquad (\alpha \neq \varkappa,\ \alpha \neq \lambda,\ \varkappa \neq \lambda)$$

zusammensetzen. Es genügt also unseren Satz für diese speziellen Fälle zu beweisen. Im Falle (c_1) folgt er unmittelbar aus dem Zolotareff-Lerchschen Satz. Im Falle (c_2) ist die n-te Potenz von P_{c_2} die identische Permutation, für ein ungerades n ist daher P_{c_2} eine gerade Permutation und zugleich $\left(\frac{D_{c_2}}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Bei einer Substitution (c_3) zerfällt aber P_{c_3} in lauter Zykeln der Ordnung 2 und hierbei ist die Anzahl der ungeändert bleibenden Systeme (10) gleich n^{k-1}. Der Charakter der Permutation P_{c_3} ist also gleich

$$(-1)^{\frac{n^k - n^{k-1}}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

dies ist aber wegen $D_{c_3} = -1$ nichts anderes als $\left(\frac{D_{c_3}}{n}\right)$.

Um nun die Webersche Formel zu beweisen, führe man die zu der quadratischen Form φ gehörende Bilinearform

$$\varphi(x, y) = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^k a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha=1}^k \varphi_\alpha(x) y_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k \varphi_\alpha(y) x_\alpha$$

ein und betrachte die Matrix des Grades $N = n^k$

$$M_\varphi = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}\varphi(x,y)}\right),$$

wobei jedes der Symbole x und y die in irgend einer festen Reihenfolge aufgeschriebenen N Wertsysteme (10) durchlaufen soll. Es wird nun, wenn s_m dieselbe Bedeutung hat wie früher,

$$M_\varphi^2 = \left(\sum_z e^{\frac{2\pi i}{n}[\varphi(x,z) + \varphi(z,y)]}\right) = \left(\prod_{\alpha=1}^k s_{\varphi_\alpha(x) + \varphi_\alpha(y)}\right)$$

eine symmetrische Matrix, die in jeder Zeile nur an einer Stelle ein von Null verschiedenes Element, nämlich das Element N enthält. Daher ist wieder M_φ^4 abgesehen vom Faktor N^2 gleich der Einheitsmatrix. Ferner ist (für ein ungerades n) in der Hauptdiagonale von M_φ^2 nur ein Element von Null verschieden, also die Spur von M_φ^2 gleich N. Man schließt nun in genau derselben Weise wie in § 1, daß die Spur G_φ von M_φ von der Form

$$G_\varphi = \sigma_\varphi i^{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2} \sqrt{N} \qquad (\sigma_\varphi = \pm 1) \tag{11}$$

ist, und daß die Determinante $\varDelta_\varphi$ von M_φ den Wert

$$\varDelta_\varphi = \sigma_\varphi i^{\frac{N^2-N}{2}} N^{\frac{N}{2}} \tag{12}$$

hat. Ist aber speziell φ die Einheitsform $\varphi_0 = \sum x_\varkappa^2$, so folgt aus der Summenformel (1) unmittelbar

$$G_{\varphi_0} = i^{k\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n^k}.$$

Daher ist

$$\sigma_{\varphi_0} i^{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2} = i^{k\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}. \tag{13}$$

Versteht man nun unter α die lineare Transformation

$$x'_\alpha = \varphi_\alpha(x) = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + a_{\alpha k} x_k, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k),$$

so geht die Determinante

$$\varDelta_\varphi = \left| e^{\frac{2\pi i}{n}(\varphi_1(x) y_1 + \cdots + \varphi_k(x) y_k)} \right|$$

aus der Determinante

$$\varDelta_{\varphi_0} = \left| e^{\frac{2\pi i}{n}(x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k)} \right|$$

hervor, indem man auf die Zeilen von $\varDelta_{\varphi_0}$ die Permutation P_α anwendet. Da aber die Determinante der Substitution α gleich D ist, so folgt aus unserem Hilfssatz $\varDelta_\varphi = \left(\frac{D}{n}\right) \varDelta_{\varphi_0}$. Die Formeln (12) und (13) liefern demnach

$$\sigma_\varphi = \left(\frac{D}{n}\right) \sigma_{\varphi_0}, \quad \sigma_\varphi i^{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2} = \left(\frac{D}{n}\right) i^{k\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Trägt man dies in die Formel (11) ein, so erhält man die Webersche Summenformel (9).

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

Eine neue Synthese von Dihydro-phenanthrenderivaten.

Von

E. Kirchner.

Vorgelegt von A. Windaus in der Sitzung vom 22. April 1921.

Durch die Arbeiten von Windaus[1]) ist es wahrscheinlich gemacht, daß dem Colchicin die Formel eines mehrfach substituierten Hydrophenanthrens nebenstehender Konstitution zukommt

CH—CH_3
H_3CO CH—NH—$COCH_3$
I II
H_3CO
H_3CO CH
III
H_2C C—OH
C = CH—OCH_3

Keine volle Gewißheit besteht vorläufig bezüglich der Stellung der Substituenten, soweit sie dem Ring III zugehören; dagegen ist sicher erwiesen, daß Ring I und II als Derivate des Trimethoxy-dihydro-β-naphtylamins erscheinen.

Die Ermittlung der Konstitution des Colchicins ist also soweit gediehen, daß es nicht mehr zu gewagt erscheint, an die Vorarbeiten zur Synthese heranzugehen. Im hiesigen Institut sind darum auf Veranlassung des Herrn Prof. Windaus eine Reihe von Arbeiten in Angriff genommen worden, die sich mit dem Aufbau passend substituierter Naphtalin- und Phenanthrenderivate beschäftigen; ich selbst habe dabei die Aufgabe übernommen eine allgemein verwendbare Methode zur Darstellung von Dihydrophenanthrencarbonsäuren auszuarbeiten und dann die Carboxylgruppe der erhaltenen Säuren durch die Aminogruppe zu ersetzen.

1) Untersuchungen über Colchicin I—IV in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1910, 1911, 1914, 1919.

Bei diesen Versuchen bin ich ähnlich verfahren wie Pschorr[1]) bei seiner bekannten Phenanthrensynthese, nur eine wichtige Änderung habe ich vorgenommen. Pschorr kondensiert o-Nitrobenzaldehyde (I) mit Phenyl-essigsäurederivaten (II) zu o-Nitro-α-phenyl-zimtsäuren (III), dann reduziert er die Nitrogruppe zur Aminogruppe (IV), diazotiert und führt durch Erwärmen mit Kupferpulver den Ringschluß zum gesuchten Phenanthrenderivat (V) herbei.

CHO; NO_2; I + CH_2—COOR; II → CH; C—COOR; NO_2; III

CH; C—COOR; NH_2; IV → —COOR; V

An Stelle der schwer zugänglichen substituierten o-Nitro-benzaldehyde habe ich die Aldehyde (VI) selbst verwendet und sie nicht mit Phenylessigsäureester, sondern mit Oxindol (VII) kondensiert[2]), das Kondensationsprodukt (VIII) habe ich hydriert (IX) und zur Aminosäure (X) aufgespalten, dann habe ich die Aminogruppe diazotiert und den Ringschluß zum Dihydro-phenanthrenderivat (XI) vorgenommen.

CHO; VI Benzaldehyd + CH_2—CO; NH; VII Oxindol → CH; C—CO; NH; VIII Benzal-oxindol → CH_2; CH-CO; NH; IX Benzyl-oxindol

1) **29**, 496 [1896].
2) Wahl Chem. C. **1909**, I, 1575.

X α-Benzyl-o-amino-phenylessigsäure

XI Dihydro-phenanthrencarbonsäure

Nach diesem Verfahren gelingt es leicht auch Oxy-aldehyde der Benzolreihe bezw. ihre Methyläther mit Oxindol[1]) zu kondensieren und so für die Colchicinsynthese brauchbare substituierte Dihydro-phenanthrencarbonsäuren zu erhalten.

Leider stellte es sich bei der praktischen Durchführung dieser Versuche heraus, daß die Ausbeute an Dihydro-phenanthrencarbonsäure (XI) nur mäßig war. Wie von vornherein zu erwarten war, entstand aus der Aminosäure (X) bei der Diazotierung neben dem Phenanthrenderivat auch die entsprechende Oxysäure (XII), die bei der Destillation im Vakuum in ihr Lacton, das Benzyl-iso-cumaranon (XIII) überging.

X

XII α-Benzyl-o-oxyphenylessigsäure

XIII Benzyl-iso-cumaranon

Es scheint als ob die Bildung des Dihydro-phenanthrenringes nicht so glatt erfolgt wie diejenige des Phenanthrens in der Pschorr'schen Synthese. Ein Kontrollversuch, bei dem ich von der α-Phenyl-o-aminohydrozimtsäure (XIV) ausgegangen bin, hat dies bestätigt. Zwar wurde auch hier bei der Destillation des diazotierten Produktes die gewünschte Dihydro-phenanthrencarbonsäure erhalten, aber nur in geringer Menge; daneben entstanden mehrere andre Produkte, von denen eines vermutlich das Lacton

1) Einige Versuche den Dinitro-phenylessigester, den mir Herr Prof. Borsche in liebenswürdiger Weise überlassen hatte, für die Kondensationen zu verwenden, führten zu keinem Ergebnis.

der α-Phenyl-o-oxy-hydrozimtsäure (XV), das α-Phenyl-dihydro-cumarin (XVI) in reinem Zustand isoliert wurde.

CH_2 CH—COOH NH_2 → CH_2 CH—COOH OH →

XIV α-Phenyl-o-amino-hydro-zimtsäure XV α-Phenyl-o-oxy-hydro-zimtsäure

CH_2 CH— CO O

XVI α-Phenyl-dihydro-cumarin.

Experimenteller Teil.

Benzyl-oxindol (IX).

Das nach Wahl[1]) bereitete Benzal-oxindol (VIII)[2]) wurde in Aether und einigen ccm Eisessig gelöst und unter Verwendung von Palladiumschwarz der katalytischen Hydrierung unterworfen. Insgesamt wurde 1 Mol. Wasserstoff auf 1 Mol. Benzal-oxindol aufgenommen; das großenteils nur suspendierte Benzal-oxindol ging mit fortschreitender Wasserstoffaufnahme in Lösung; der Schluß der Hydrierung zeigte sich durch das Farbloswerden der Lösung an. Nach dem Abfiltrieren des Palladiums und dem Abdestillieren des Aethers wurde der Rückstand aus verd. Alkohol umkrystallisiert. Das erhaltene Benzyl-oxindol (IX) krystallisiert in feinen, weißen Nadeln vom Schm. 130°.

0.1080 g Sbst.: 6.2 ccm N (20° 749 mm). — 0.1651 g Sbst.: 0.4871 g CO_2, 0.0877 g H_2O.

$C_{15}H_{13}ON$	Ber.	C 80.68	H 5.87	N 6.28
	Gef.	„ 80.46	„ 5.94	„ 6.59.

1) loc. cit.
2) Das Oxindol wurde aus Isatin dargestellt. Marschalk B 45, 583 (1912).

α-Benzyl-o-aminophenylessigsäure. (X)

Zur Aufspaltung des Benzyl-oxindols verfuhr ich ähnlich wie Marschalk beim Oxindol[1]). 5 g des Laktams wurden mit 200 ccm einer kaltgesättigten Lösung von Bariumhydroxyd 4 Stunden auf 170° erhitzt; die so erhaltene klare Lösung des α-benzyl-o-aminophenylessigsauren Bariums schied auf Zusatz überschüssiger Salzsäure langsam in der Kälte, rasch beim Erwärmen das Benzyloxindol wieder aus. Da die freie Aminosäure also sehr unbeständig zu sein schien, wurde das Bariumsalz direkt weiter verarbeitet; es wurde mittels Natriumcarbonat in das Natriumsalz verwandelt, die alkalische Lösung mit der berechneten Menge Natriumnitrit versetzt und die stark gekühlte Mischung in kalte verd. Schwefelsäure eingegossen; die Temperatur stieg während der Diazotierung nicht über 0°; dann wurde Kupferpulver hinzugefügt und unter starkem Rühren auf etwa 50° erwärmt. Nach Beendigung der Stickstoffentwicklung wurde das Reaktionsprodukt mit Aether aufgenommen und durch Ammoniak in einen sauren (I) und einen neutralen (II) Anteil zerlegt.

I. Der saure Anteil wurde der Hochvakuumdestillation unterworfen und ging fast vollständig zwischen 170—270° über. Das Destillat wurde wieder in einen sauren (A) und einen neutralen Anteil (B) zerlegt.

A. Dihydrophenanthren-carbonsäure. (XI).

Das in kaltem Ammoniak leicht lösliche Material wurde aus der alkalischen Lösung mit Salzsäure gefällt; der Niederschlag wurde abfiltriert, getrocknet und aus Petrolaether umkrystallisiert, er bildete dann fast weiße Krystalle vom Schm. 127—130°. Ausbeute ca. 15 proz. der theoretischen.

0.1420 g Sbst.: 0.3077 g CO_2, 0.0509 g H_2O.
$C_{15}H_{12}O_2$ Ber. C 80.32 H 5.39
Gef. „ 80.54 „ 5.47.

Um die Säure als Dihydro-phenanthrencarbonsäure zu charakterisieren, wurde sie in das Calciumsalz verwandelt, mit Calciumoxyd gemischt und im Vakuum destilliert. Bei 20 mm ging zwischen 200 und 300° eine farblose Flüssigkeit über, die bald krystallinisch erstarrte und dann unscharf gegen 48° schmolz. Aus diesem Material wurde mittels methylalkoholischer Pikrinsäurelösung eine Pikrinsäure-Verbindung vom Schm. 142—143° bereitet,

1) Marschalk, loc. cit.

die mit reinem Phenanthrenpikrat keine Schmelzpunktsdepression zeigte [1]).

B. Benzyl-iso-cumaranon. (XIII).

Das in kaltem Ammoniak unlösliche Material verhielt sich wie ein Lacton; es löste sich leicht in warmer Natronlauge und fiel auf Zusatz von verd. Salzsäure wieder aus. Beim Umkrystallisieren aus wenig Methylalkohol lieferte es gelblich gefärbte Nadeln, die beim Abpressen auf Ton weiß wurden. Der Schmp. lag bei 58—59°.

0.0956 g Sbst.: 0.2814 g CO_2, 0.0476 g H_2O
$C_{15}H_{12}O_2$ Ber. C 80.32 H 5.39
Gef. „ 80.28 „ 5.57.

II. Der neutrale Anteil des ursprünglichen Diazotierungsproduktes enthielt überraschender Weise kein Benzyl-iso-cumaranon mehr, sondern einen in heißer Natronlauge löslichen stickstofffreien Stoff, der aus Methylalkohol in schwach gelben Krystallen vom Schmp. 225° krystallisierte. Die Natur dieses Stoffes konnte nicht einwandfrei ermittelt werden.

0.0747 g Sbst.: 0.2195 g CO_2, 0.0311 g H_2O
$C_{15}H_{10}O_2$ (?) Ber. C 81.05 H 4.54
Gef. „ 80.14 „ 4.66.

α-Phenyl-o-amino-hydrozimtsäure. (XIV).

Die Säure wurde nach den Angaben Pschorr's [2]) bereitet, nur wurde die Hydrierung der α-Phenyl-o-aminozimtsäure auf katalytischem Wege vorgenommen. Die Verarbeitung auf Dihydro-phenanthrencarbonsäure geschah genau in derselben Weise wie bei der α-Benzyl-o-amino-phenylessigsäure.

Die Dihydro-phenanthrencarbonsäure vom Schmp. 127—130° fand sich in dem sauren Anteil der Hochvakuumdestillation.

0.1131 g Sbst.: 0.3343 g CO_2, 0.0580 g H_2O
$C_{15}H_{12}O_2$ Ber. C 80.32 H 5.39
Gef. „ 80.61 „ 5.74.

Das α-Phenyl-dihydro-kumarin fand sich sowohl im neutralen Anteil des ursprünglichen Diazotierungsprodukts als auch im Hochvakuumdestillat des ursprünglich sauren Anteils; es schmolz nach dem Umkrystallisieren aus Alkohol bei 122—123°.

1) Neben der Dihydro-phenanthrencarbonsäure fanden sich in den höchsten Fraktionen der Vakuumdestillation auch geringe Mengen Phenanthren-carbonsäure vom Schmp. 250°.

2) B. 29, 496 [1896].

Anhangsweise seien noch einige Versuche über die Kondensation zwischen o-Nitrobenzaldehyd und Oxindol mitgeteilt. Hierbei wurden zunächst nur Schmieren erhalten. Erst bei Verwendung von Benzol oder Toluol als Lösungsmittel ließ sich der Prozeß auf dem gewünschten Punkte festhalten.

CHO CH_2-CO CH C—CO NH NO_2 + NH → NO_2 NH

XVII

Um das o-Nitro-benzal-oxindol (XVII) in das o-Amino-benzyl-oxindol zu verwandeln, wurde es der katalytischen Hydrierung in Eisessig unterworfen. Die Wasserstoffaufnahme entsprach nahezu der theoretischen, doch wurde statt des erwarteten o-Amino-benzyl-oxindols (XVIII) nur peri-Chindolin (XX) erhalten. Der Vorgang ist an der Hand der Konstitutionsformeln leicht zu übersehen:

CH C—CO NO_2 NH → CH_2 CH—CO NH_2 NH oder CH_2 CH— NH_2 OC NH

XVII XVIII

CH_2 C C → NH NH → N NH

XIX XX

Bemerkenswert ist es nur, daß anstelle des peri-Dihydro-chindolins (XIX) das peri-Chindolin selbst erhalten wird. Vermutlich ist die Dihydroverbindung sehr unbeständig und geht sehr leicht freiwillig in die aromatische Verbindung über, wie dies bereits Fichter[1]) für das isomere ana-Dihydro-chindolin festgestellt hat.

1) B. **43**, 3489 [1910].

o-Nitro-benzal-oxindol. (XVII).

Für die Darstellung dieser Verbindung erwies es sich als zweckmäßig den o-Nitro-benzaldehyd im Ueberschuß anzuwenden. 8,8 g Ox-indol und 14 g o-Nitro-benzaldehyd wurden in 150 ccm Benzol gelöst; zu der siedenden Lösung wurden etwa 0,5 ccm Piperidin hinzugefügt; sofort erfolgte ein Farbenumschlag in rot und beim Abkühlen nach 10 Minuten dauerndem Erwärmen schied sich das gesuchte Kondensationsprodukt, das o-Nitrobenzal-oxindol, in guter Ausbeute krystallinisch aus. Aus Alkohol umkrystallisiert bildete es feine rotgelbe Nadeln vom Schmp. 225°, die in Benzol und Aether sehr schwer löslich waren. Ausbeute 12 g

0.0971 g Sbst.: 0.2420 g CO_2, 0.0366 g H_2O. 0.1332 g Sbst.: 0.3318 g CO_2, 0.0502 g H_2O. 0.1412 g Sbst.: 13.1 ccm N (18°, 746 mm),

$C_{15}H_{10}O_3N_2$	Ber.	C 67.64	H 3.79	N 10.53
	Gef.	„ 67.97, 67.94	„ 4.22, 4.22	„ 10.46.

Chindolin. (XX).

5 g o-Nitrobenzal-oxindol wurden in 100 ccm Eisessig suspendiert und bei Gegenwart von Palladiumschwarz in einer Wasserstoffatmosphäre geschüttelt; es wurden 1600 ccm Wasserstoff aufgenommen, eine Menge, die etwa 4 Mol. Wasserstoff entspricht. Bei Beendigung der Hydrierung war das Reaktionsprodukt fast vollständig in Lösung. Nach dem Abfiltrieren des Palladiums wurde der Eisessig im Vakuum abgedampft und der Rückstand aus alkoholischer Salzsäure umkrystallisiert. Hierbei wurden schwach grünlichgelb gefärbte Nadeln vom Schmp. 280° erhalten, die das salzsaure Salz des Chindolins darstellen. Aus dem Salz wurde mittels Ammoniak die Base frei gemacht; sie war fast rein weiß, in den meisten Lösungsmitteln fast unlöslich und schmolz erst oberhalb 290°. Das aus Eisessig krystallisierte Acetylderivat bildete derbe weiße Nadeln vom Schmp. 185°.

Die Analyse gab die für Chindolin passenden Werte

0.1240 g Sbst.: 0.3750 g CO_2, 0.0569 g H_2O.

$C_{15}H_{10}N_2$	Ber.	C 82.53	H 4.62
	Gef.	„ 82.48	„ 5.14.

Das für diese Untersuchungen verwendete Isatin verdanke ich dem liebenswürdigen Entgegenkommen der Badischen Anilin- und Sodafabrik und sage dafür meinen besten Dank.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium Göttingen.

Anwendung der Spannungstheorie auf das Ringsystem des Cholesterins.

Von

A. Windaus und W. Hückel.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Mai 1921.

Das verschiedenartige Verhalten der gesättigten aliphatischen Dicarbonsäuren beim Erhitzen bis 300° (eventuell unter Zusatz von Essigsäureanhydrid) ist ein wichtiges diagnostisches Hilfsmittel, das zu entscheiden erlaubt, in welcher Stellung die beiden Carboxylgruppen zu einander stehen. Bei dieser Reaktion, die von Blanc zuerst in ihrer Wichtigkeit erkannt und nach ihm benannt ist, spalten die Säuren der Malonsäurereihe Kohlendioxyd ab und gehen in gesättigte einbasische Säuren über, die Säuren der Bernstein- und Glutarsäure-reihe liefern innere Anhydride, die einen fünf- oder sechsgliedrigen Heteroring enthalten, die Säuren der Adipin- und Pimelinsäurereihe geben Ketone vom Typus des Cyclopentanons und Cyclo-hexanons. Säuren, deren Carboxylgruppen noch weiter von einander entfernt stehen, scheinen in der Hauptsache unverändert zu bleiben[1]).

Die Frage, ob die Blanc'sche Methode auch bei alicyclischen Dicarbonsäuren zuverlässige Ergebnisse liefern würde, ist wiederholt aufgeworfen, aber bisher nicht entschieden worden. Windaus und Dalmer[2]) weisen darauf hin, daß auch bei mehrkernigen hydroaromatischen Verbindungen die Bildung des Fünf- und Sechsringes begünstigt erscheine und glauben darum auch hier die Blanc'sche Methode, wenn auch mit einem gewissen Vorbehalt verwenden zu dürfen. Windaus und Hückel[3]) haben versucht die Frage auf experimentellem Wege zu klären, sie haben einige hydroaromatische 1,2 Dicarbonsäuren von bekannter Struktur untersucht und gefunden, daß sich die Hexahydrohomophtalsäure wie eine

1) C. r. 144, 1356 [1907].
2) B. 52, 162 [1919].
3) Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen 1920.

substituierte Glutarsäure, die Hexahydro-hydrozimt-o-carbonsäure wie eine substituierte Adipinsäure verhält.

Von verschiedenen Seiten ist inzwischen die Blanc'sche Methode zur Konstitutionsermittlung polycyclischer hydroaromatischer Säuren, wie sie beim Abbau des Cholesterins und der Gallensäuren entstehen, benutzt worden, und die sich daraus ergebenden Schlüsse sind mit mehr oder minder großer Sicherheit gezogen worden. Eine eingehende Beschäftigung mit dem dabei gewonnenen experimentellen Material zeigt aber, daß die bedingungslose Übertragung der an aliphatischen Dicarbonsäuren abgeleiteten Regeln auf komplizierte hydroaromatische Gebilde nicht ohne weiteres zulässig sein kann, da man hierbei auf Widersprüche stößt.

Wir führen einen besonders sorgfältig untersuchten Fall an.

```
        |    |                           |
        CH   C                           CH
       / \  / \                         / \ /
   H2C    Cx   CH2                 H2C    C----CH2
    | I   | II |          oder      |     |     |
   H2C    CH   CH2                 H2C    CH    CH2
     \   / \  /                      \   / \   /
    HOHC    CH2                     HOHC    CH2
        Ia                              Ib
```

Cholestanol

Die aus dem Cholestanol durch Aufspaltung des Ringes I entstehende Dicarbonsäure $C_{27}H_{46}O_4$

```
          CH   C                          CH
         / \  / \                        / \ /
     H2C    Cx   CH2                 H2C    C----CH2
      |     |    |        oder        |     |     |
    HOOC    CH   CH2                HOOC    CH    CH2
           / \  /                          / \   /
     HOOC     CH2                    HOOC     CH2
          IIa                              IIb
```

Säure $C_{27}H_{46}O_4$

gibt bei der Blanc'schen Reaktion glatt ein Keton $C_{26}H_{44}O$;

```
          |                              |
          CH   C                         CH
         / \  / \                       / \ /
     H2C    Cx   CH2                H2C    C----CH2
      |     |    |        oder       |     |     |
     OC --- CH   CH2                OC --- CH    CH2
              \  /                          \   /
              CH2                            CH2
          IIIa                           IIIb
```

Keton $C_{26}H_{44}O$

dieses wird mit Salpetersäure zu einer Dicarbonsäure $C_{26}H_{44}O_4$ (IV)

```
        CH  CH2                          CH
       /  \/  \                         /  \ /
 HOOC    CH   CH2                HOOC    C------CH2
         |    |         oder             |      |
         CH   CH2                        CH     CH3
        /  \ /                          /  \   /
   HOOC    CH2                     HOOC     CH2
      IV a                              IV b
```

Säure $C_{26}H_{44}O_4$

aufgespalten, die bei der Blanc'schen Reaktion ein Säureanhydrid liefert. Hieraus hat man geschlossen, daß die Säure $C_{27}H_{46}O_4$ (II) eine substituierte Adipinsäure, die Säure $C_{26}H_{44}O_4$ (IV) eine substituierte Glutarsäure darstellt und daß also Ring I ein Sechsring ist. Die aus Cholestan-7-on

```
        CH  C                            CH
       /  \/  \                         /  \ /
   H2C    C    CH2                 H2C    C------CH2
    |     |    |        oder        |     |      |
   H2C    CH   CO                  H2C    CH     CO
     \   /  \ /                      \   /  \   /
      CH2  CH2                        CH2   CH2
        V a                             V b
```

Cholestan-7-on

durch Aufspaltung des Ringes II entstehende Säure $C_{27}H_{46}O_4$ (VI)

```
        CH  C                            CH
       /  \/  \                         /  \
   H2C    C    COOH                H2C    C------COOH
    |     |             oder        |     |
   H2C    CH   COOH                H2C    CH     COOH
     \   /  \ /                      \   /  \   /
      CH2  CH2                        CH2   CH2
        VI a                            VI b
```

Säure $C_{27}H_{46}O_4$

gibt dagegen bei der Destillation ein Säureanhydrid und verhält sich demnach so wie in der aliphatischen Reihe eine Glutarsäure; man müßte also daraus folgern, daß der Ring II ein Fünfring ist.

Studiert man dagegen das Verhalten einer anderen Gruppe von Oxydationsprodukten nach derselben Methode, kommt man zu dem Resultat, daß Ring II kein Fünfring sein kann. Aus dem Cholesterin

CH C
H_2C C CH_2
H_2C CH CH
CHOH CH
VII a

oder

CH
H_2C C—CH_2
H_2C CH CH
CHOH CH
VII b

Cholesterin

läßt sich über eine Reihe sicher ermittelter Zwischenprodukte durch Aufspaltung von Ring I und II eine Tricarbonsäure $C_{25}H_{42}O_6$

CH C
H_2C C CH_2
HOOC COOH COOH
VIII a

oder

CH
H_2C C—CH_2
HOOC COOH COOH
VIII b

Säure $C_{25}H_{42}O_6$

darstellen, die bei der Destillation Kohlendioxyd und Wasser abspaltet und eine Ketomonocarbonsäure

CH C
C
H_2C CH_2
COOH
CO
IX a

oder

CH
C—CH_2
CH_2
COOH
CO
IX b

Säure $C_{24}H_{40}O_3$

gibt. Diese Säure von der Formel $C_{24}H_{40}O_3$ wird durch Oxydation in eine Tricarbonsäure $C_{24}H_{40}O_6$

CH C
COOH C CH_2
COOH COOH
X a

oder

CH
COOH C—CH_2
COOH COOH
X b

Säure $C_{24}H_{40}O_6$.

verwandelt, die bei erneuter Destillation eine Ketomonocarbonsäure $C_{23}H_{38}O_3$ liefert.

CH C
C
COOH
CO—CH₂ oder z. B. CH
COOH C—CH_2
CO

XI a Säure $C_{23}H_{38}O_3$ XI b

Aus der Blanc'schen Regel müssen wir also schließen, daß in der Säure $C_{24}H_{40}O_6$ noch zwei Carboxylgruppen in 1,6 Stellung zu einander stehen; dies ist aber, wie die Betrachtung der Formel zeigt, nur möglich, wenn außer Ring I auch Ring II ein Sechsring ist.

Die Blanc'sche Regel führt also bei den beiden angeführten Reaktionen zu verschiedenen, mit einander nicht vereinbaren Schlußfolgerungen und versagt also mindestens in einem der beiden Fälle.

Wir haben uns darum erneut die Frage vorgelegt, in welchem Ausmaß die Blanc'sche Regel auf alicyclische Verbindungen Anwendung finden könne und haben versucht die Sachlage dieses Mal durch Betrachtungen am Modell zu klären. Hierbei haben wir uns eng an die Vorstellungen von Sachse[1]) und Mohr[2]) angeschlossen und also unter Verzicht auf die Annahme, daß alle Ringkohlenstoffatome in einer Ebene liegen, für cyclische Systeme eine möglichst spannungsfreie Anordnung gesucht, die mit der tetraedersymmetrischen Lagerung vierwertiger Kohlenstoffatome vereinbar ist[3]).

Bei den zu betrachtenden kondensierten hydro-aromatischen Systemen sind zwei Arten der Verknüpfung zu unterscheiden, je nachdem die beiden Ringe in cis- oder trans-Stellung zu einander stehen.

Als cis-Stellung zweier Ringe bezeichnen wir die Lage, bei der die Wasserstoffatome an den beiden 1,2 Kohlenstoffatomen, die die Ringe verknüpfen, in beiden Ringen auf derselben Seite liegen. Die trans-Stellung zeichnet sich dadurch aus, daß die beiden genannten Wasserstoffatome sich in beiden Ringen auf verschiedenen Seiten befinden. Wir haben diese Form der Definition von cis- und trans-Stellung deshalb der üblichen, bei der man die Ringe vorher in eine Ebene gebracht hat, vorgezogen, weil die

1) B. 23, 1363 [1890], Ph. Ch. 10, 203 [1892], 11, 185 [1893].
2) I. pr. [2] 98, 315 [1918].
3) Für vier- und fünfgliedrige Ringe ist die ebene Anordnung die spannungsärmste, für sechs- und mehrgliedrige Ringe aber nicht.

praktische Durchführung der letzteren Operation an mehrkernigen Modellen Schwierigkeiten bereitet und unübersichtlich wird.

Die Versuche am Modell und deren geometrische Berechnungen lehren nun, daß bei 1,2 cis-Stellung der Ringe zu einander die an monocyclischen Verbindungen gewonnenen Regeln ihre Gültigkeit behalten. Dagegen treten bei trans-Stellung der Ringe neue Verhältnisse auf.

Zwei Fünfringe in 1,2 cis-Stellung:

Die Verbindung zweier Fünfringe in 1,2 cis-Stellung miteinander bietet deshalb nichts Bemerkenswertes, weil die entsprechenden Valenzen der 1,2 Kohlenstoffatome — so sollen die die Tetraeder-Symmetrie des Kohlenstoffatoms charakterisierenden, vom Mittelpunkt zu den Ecken des Tetraeders zeigenden Richtungen der Kürze halber heißen — in beiden Fällen in einer Ebene mit den Valenzen liegen, die jene 1,2 Kohlenstoffatome miteinander verbinden.

Zwei Fünfringe in 1,2 trans-Stellung:

Bei der trans-Stellung am ebenen Fünfring ist dies nicht der Fall. Die trans-Valenzen zweier benachbarter Kohlenstoffatome sind windschiefe Geraden. Ihre Projektionen auf eine Ebene senkrecht zur gemeinschaftlichen Achse der beiden Kohlenstoffatome, mit der sie je einen Winkel von $109^0\,28'$ bilden, schließen einen Winkel von 120^0 ein.

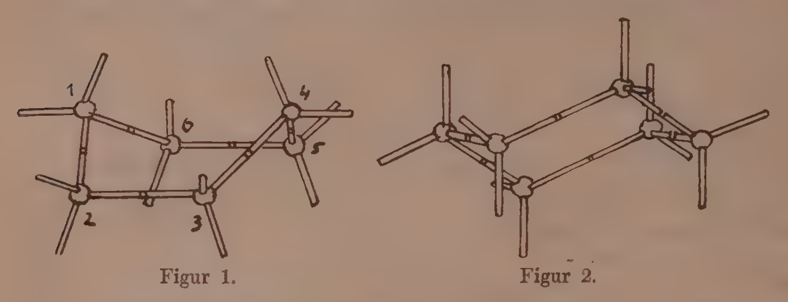
Die Kohlenstoffatome eines in trans-Stellung angelagerten Fünfrings können sich also nicht in der spannungslosen ebenen Anordnung befinden. Bei einer spannungslosen Anlagerung von drei Kohlenstoffatomen an die 1,2 Kohlenstoffatome C_1 und C_2 des ebenen Fünfringes in trans-Stellung nähern sich die Endglieder nicht, sondern stehen so weit voneinander ab, daß eine sehr starke Verbiegung der Valenzen nötig ist, um den trans-Fünfring zu schließen.

Der Sechsring:

Vom Sechsring gibt es nach Sachse zwei Arten von spannungsfreien Formen, die sogenannte symmetrische (nach Mohr[1]) rhombisch-pyramidale), Fig. 1, und die unsymmetrische (trigonal-skalenoedrische), Fig. 2. „Spannung“ bedeutet eine mehr oder minder große Abweichung von der tetraedersymmetrischen Lage benachbarter Kohlenstoffatome in Richtung wie in Entfernung.

1) s. Mohr, l. c. S. 335.

Nach dem Modell scheinen zunächst je nach der Stellung zweier benachbarter Kohlenstoffatome mehrere Möglichkeiten der cis- und der trans-Stellung gegeben. Die benachbarten Kohlenstoffatome



Figur 1. Figur 2.

stehen nämlich entweder spiegelbildlich (2,3 und 5,6 in Fig. 1) oder invers[1]) (1 u. 2, 3 u. 4, 4 u. 5, 6 u. 1 in Fig. 1, sowie sämtliche in Fig. 2) zueinander.

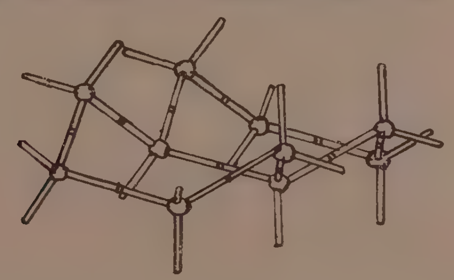
Bei spiegelbildlichen Kohlenstoffatomen liegen die beiden Valenzen, an denen die Substituenten in cis-Stellung haften, mit den die 1,2 Kohlenstoffatome verbindenden Valenzen in einer Ebene; die trans-Valenzen sind in der oben beim Fünfring ausgeführten Weise um 120° gegeneinander verdreht. Bei inversen 1,2 Kohlenstoffatomen sind die cis-Valenzen, die man nach der oben gegebenen Definition leicht auffindet, um 60° gegeneinander verdreht. Trans-Valenzen kann man hier zwei Arten unterscheiden, ein Paar mit einer Drehung von 60°, das andere von 180° gegeneinander.

Es ist nun aber sehr wahrscheinlich, daß die zwei cis-Stellungen einerseits und die drei trans-Stellungen andererseits nicht voneinander verschieden sind. Wie schon Mohr ausgeführt hat, lassen sich beide spannungsfreie Formen des Sechsringes unter einem so geringen Arbeitsaufwande ineinander überführen, daß sie nicht als wesensverschieden voneinander, sondern als spannungsfreie Grenzzustände einer Reihe sehr wenig gespannter Formen anzusehen sind, um so mehr, als in Wirklichkeit die Atome nicht vollkommen starr wie im Modell angeordnet sind. Bei diesem „Umklappen" mehrerer Kohlenstoffatome von einer spannungsfreien Form über gering gespannte Konfigurationen in die zweite spannungsfreie Form nehmen die cis-Valenzen zweier benachbarter Atome Stellungen zueinander ein, die gegenseitigen Verdrehungen von 0° bis 60° entsprechen: die trans-Valenzen sind in den spannungsarmen Zwischenformen einerseits zwischen 60 und 120°, andrerseits

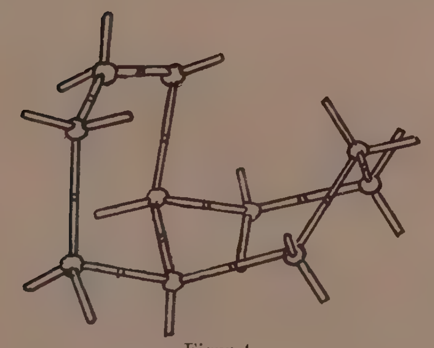
1) s. Mohr, l. c. S. 335 Anm.

zwischen 180 und 120° verdreht. Bei allen diesen Verwandlungen verbleiben cis-Substituenten stets in cis-, trans-Substituenten stets in trans-Stellung. Erstere lassen sich ohne Schwierigkeit in die Lage unverdrehter Valenzen zurückführen, letztere können leicht in die Lage um 60° verdrehter trans-Valenzen gebracht werden.

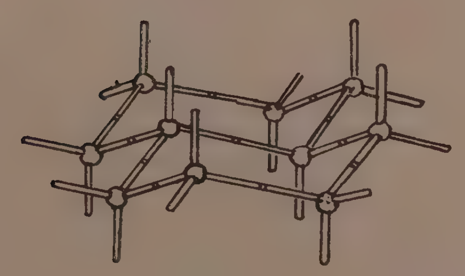
Die gleichen Verwandlungen sind bei Ringsystemen möglich. Fig. 3 und 4 zeigen die spannungslosen Formen zweier in cis-Stellung stehender Sechsringe, die in Fig. 3 an spiegelbildlichen, in Fig. 4 an inversen Kohlenstoffatomen aneinander haften. Beide Modelle sind leicht in einander überführbar. Fig. 5 zeigt



Figur 3.



Figur 4.



Figur 5.

eine spannungslose Form zweier in trans-Stellung an einander gelagerter Sechsringe. Eine Verwandlung von 3 oder 4 in 5 ist dagegen ohne „Bindungswechsel“, d. h. ohne vorübergehende Lösung einer C-C Bindung nicht möglich.

Bei der Verknüpfung mehrerer Sechsringe miteinander sind die cis-Stellungen dadurch charakterisiert, daß die ringverknüpfenden 1,2 Kohlenstoffatome, wie bei einem isoliertem Ring, entweder spiegelbildlich zu einander stehen oder leicht in diese Lage gebracht werden können. Dagegen stehen die in trans-Stellung verknüpfenden Kohlenstofftetraeder stets invers zu einander. Wir sind daher berechtigt für cis-Stellungen am Sechsring die substituierten und die den Ringen angehörenden Valenzen der 1,2 Kohlenstoffatome als in einer Ebene liegend anzusehen. Bei trans-Stellungen sind die substituierten Valenzen um 60^0 gegen einander verdreht. Dadurch kann ein Unterschied der Spannung von in cis- und in trans-Stellung an einen Sechsring angelagerten andern Ringen begründet sein.

Hierfür seien die folgenden Beispiele angeführt, bei denen zur Vereinfachung der Rechnung der Sechsring als spannungsfrei und starr angenommen ist, die beiden Ringen angehörenden Kohlenstoffatome C_1 und C_2 mithin mit ihren Valenzrichtungen im Raume fest liegen.

Cis-Fünfring am Sechsring.

Dieser Fall erledigt sich nach dem oben Gesagten wie der Fall cis-Fünfring am Fünfring.

Trans-Fünfring am Sechsring.

Die 1,2 Kohlenstoffatome C_1 und C_2 des Sechsringes stehen invers zu einander, ihre trans-Valenzen bilden zwei windschiefe Gerade; ihre Projektionen auf eine Ebene senkrecht zur gemeinschaftlichen Achse von C_1 und C_2, mit der sie einen Winkel von je $109^0\,28'$ bilden, schließen einen Winkel von 60^0 ein. Eine ebene Anordnung des trans-Fünfringes, die fast spannungsfrei sein würde, ist daher unmöglich. Als Maß für die Spannung — Abweichung von der tetraedersymmetrischen Lage in Richtung wie in Entfernung — ist man gewöhnt die Ablenkung der Valenzen aus der Normallage, in der sie einen Winkel von $109^0\,28'$ miteinander bilden, anzusehen.

Um diese Richtungsunterschiede zu berechnen, muß man vorher alle Entfernungsanomalien dadurch ausgeglichen haben, daß man alle Kohlenstoffatome in ihre normale Entfernung gebracht hat. Zum Vergleich mit den bekannten Spannungen der einfachen Ringe,

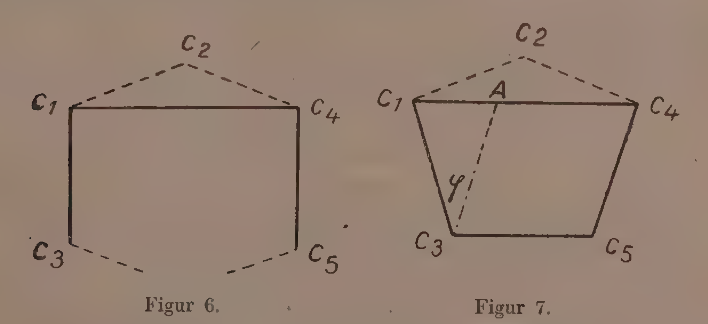
die auf diese Weise berechnet worden sind, soll in folgendem diese Rechnung durchgeführt werden[1]). Die Normalentfernung zweier Kohlenstoffatome wird dabei gleich zwei gesetzt.

Hier ist die Lage der Kohlenstoffatome C_3, C_4, C_5 mit der geringsten möglichen Spannung gesucht.

Behauptung: Die geringste Abweichung von der tetraedersymmetrischen Lage liegt vor, wenn diese drei Kohlenstoffatome mit einem der beiden mit dem Sechsring gemeinsamen Kohlenstoffatom, beispielsweise C_1, in einer Ebene liegen.

Beweis: Sachse[2]) hat bewiesen, daß von allen Raum-n-ecken die ebene Konfiguration die größte Winkelsumme $= (n-2)\ 180^0$ hat. Soll ein n-Eck aus Strecken, die verschiedene vorgegebene Winkel einschließen (z. B. aus Kohlenstoffvalenzen) gebildet werden, so ist, wenn die Summe dieser Winkel die Winkelsumme des betreffenden ebenen n-Ecks übersteigt, die ebene Anordnung stets diejenige, bei der die gegebenen Winkel am wenigsten geändert werden müssen.

Bringt man bei vorliegender Aufgabe C_1, C_3, C_4 und C_5 in ein ebenes Viereck, so sind die Geraden, die dieses Viereck bilden sollen, $C_1 C_3$, $C_1 C_4$, $C_4 C_5$ und je eine Valenz von C_3 und C_5; ihre Winkel betragen bei C_3 und C_5 $109^0 28'$, bei C_1 und C_4, wie leicht zu beweisen 90^0 (Fig. 6), $\Sigma > 360^0$. Danach hat eine ebene Anordnung die geringste Spannung (Fig. 7).



Figur 6. Figur 7.

Zur Berechnung der Valenzablenkung als Spannungsmaß denkt man sich in dieser Ebene C_3 in seine normale Entfernung 2 von C_1 und C_5 gebracht, ebenso C_5 von C_4. Von den möglichen Vierecken mit den Seiten $C_1 C_4$, $C_1 C_3 = C_4 C_5 = C_3 C_5 = 2$ ist das

1) Die Rechnungen hat Herr Dr. W. Hückel durchgeführt.

2) Ph. Ch. 10. 225 [1892].

mit symmetrischer Anordnung von C_1, C_3, C_4, C_5 dasjenige, bei dem die Valenzen am wenigsten verbogen werden müssen. Denn bei jeder Unsymmetrie werden die Valenzen eines der 4 Kohlenstoffatome stärker auseinandergebogen als die der drei andern; zum Ausgleich, da die Winkelsumme stets 360° betragen muß, müssen dann die Valenzen eines andern Kohlenstoffatoms besonders stark zusammengebogen werden. Das bedingt eine größere Spannung jeder unsymmetrischen Anordnung.

In dem bei symmetrischer Verteilung entstandenen Trapez (Fig. 7) gibt die Summe der Differenzen der Winkel bei C_1, C_4, C_3, C_5 gegen die entsprechenden Winkel unverdrehter Valenzen (Fig. 6) die gesamte Ablenkung der Valenzen an.

$$\Delta\, C_1 C_2 C_4, \text{ aus } C_1 C_2 = C_2 C_4 = 2, \sphericalangle C = 109^0 28':$$

$$C_1 C_4 = \sqrt{10{,}667} = 3{,}266.$$

$$\Delta\, C_1 C_3 A, \text{ aus } C_1 C_3 = C_3 A = 2,\ C_1 A = C_1 C_4 - 2 = 1{,}266:$$

$$\sphericalangle \varphi = 36^0 54'.$$

Daraus im Trapez:

$$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_4 = 71^0 33', \sphericalangle C_3 = \sphericalangle C_5 = 108^0 27'.$$

Valenzablenkung

$$2.(90^0 - 71^0 33') + 2.(109^0 28' - 108^0 27') = 38^0 56';$$

für eine Valenz der drei nicht festen Kohlenstoffatome C_3, C_4, C_5 = $6^0 29'$.

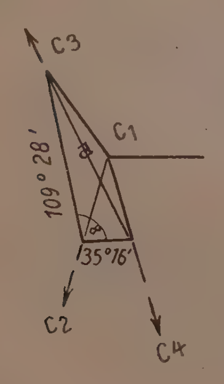
Bei dieser Rechnung ist also vorausgesetzt, daß die gesamte Spannung des Systems Sechsring — trans-Fünfring in den Fünfring verlegt ist. Die so gefundene Spannung ist tatsächlich die geringste, die dieses System haben hann. Durch Verlegung eines Teils oder der gesamten Spannung vom Fünfring in den Sechsring wird der Gesamtbetrag der Spannung erhöht. Beim Intaktlassen des Sechsrings ist der mit $38^0 56'$ gespannte Fünfring gegenüber dem ebenen Modell derart verändert worden, daß an einer Stelle, nämlich bei den Atomen C_1 und C_2 eines gegen das andere verdreht worden ist; die trans-Valenzen von C_1 und C_2 bilden keine Winkel von 120° mehr, sondern sind um 60° auf einen Winkel von 60° zurückgedreht worden. Denkt man sich nun aber umgekehrt den Fünfring in ebener Anordnung intakt gelassen, und setzt einen Sechsring an zwei trans-Valenzen von C_1 und C_2 an, so muß in diesem eines dieser C-Atome verdreht sein; die trans-Valenzen im Sechsring bilden keine Winkel von 60° bezw. 180° mehr, sondern sind um 60° auf einen Winkel von 0° bezw. 120°

zurückverdreht. Die unten durchgeführte Rechnung zeigt nun, daß die Gesamtspannung dieses Systems größer ist als beim trans-Fünfring am spannungsfreien Sechsring. Bei der Verdrehung eines Kohlenstoffatoms im Sechsring um 60^0 kommt also mehr Spannung in den Ring als bei gleich großer Verdrehung eines Kohlenstoffatoms im Fünfring. Wird also in dem mit $38^0 56'$ gespannten Fünfring das verdrehte Kohlenstoffatom, das auch dem Sechsring angehört, nach der ebenen fast spannungsfreien Lage hin zurückverdreht, so wird damit zwar die Spannung des Fünfrings um einen gewissen Betrag kleiner; die gleiche Verdrehung dieses Kohlenstoffatoms im Sechsring ruft aber in diesem einen größeren Betrag der Spannung neu hervor.

Die Möglichkeit, unter mehr oder minder starker Erhöhung der Gesamtspannung Spannung vom Fünfring in den Sechsring zu verlagern, bietet zwar für bicyklische Systeme keine besonderen Gesichtspunkte; dagegen treten solche bei den Untersuchungen an tricyklischen Systemen auf (s. unten).

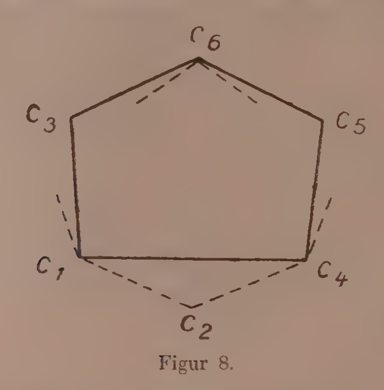
Trans-Sechsring am Fünfring.

Wir vernachlässigen der Einfachheit halber die geringe Abweichung der Kohlenstoffatome im Fünfring von der Normallage und nehmen an, daß die Atome C_1 und C_2 spiegelbildlich zu einander stehen; die trans-Valenzen sind also um 120^0 gegeneinander verdreht. Auch hier ist die Anordnung der fünf Atome C_1, C_3, C_4, C_5, C_6 in einem *ebenen* Fünfeck die Lage der geringsten Spannung. Denn die Winkel zwischen den Valenzen, die das Fünfeck bilden sollen, betragen insgesamt $3 . 109^0 28' + 2 . 127^0 56'$, während die Winkelsumme im ebenen Fünfeck $5 . 108^0$ ist[1]).



1) Die Winkel bei C_1 und C_4, d. h. die Winkel der ringbildenden Valenzen von C_1 und C_4 mit der Geraden $C_1 C_4$, ergeben sich zu $127^0 56'$ aus folgender Überlegung. Die ringbildende Valenz von C_1 bildet mit den zwei in der Dreiecksebene $C_1 C_2 C_4$ liegenden Valenzen von C_1 je einen Winkel von $109^0 28'$. Die gleichfalls in diese Dreiecksebene fallende Gerade $C_1 C_4$ bildet mit der im Dreieck $C_1 C_2 C_4$ liegenden Valenz von C_1 den Winkel $35^0 16'$. Durch Berechnung des sphärischen Dreiecks mit den Seiten $109^0 28'$ $35^0 16'$ und dem $\sphericalangle \alpha = 120^0$ (s. Skizze) findet man die Seite a zu $127^0 56'$. Die gleiche Überlegung gilt für C_4.

Zur Konstruktion des ebenen Fünfecks aus den Seiten $C_1 C_4 = 3{,}266$, $C_1 C_3 = C_4 C_5 = C_5 C_6 = C_3 C_6 = 2$ kann man über zwei Winkel noch frei verfügen. Man wählt diese so, daß das Fünfeck möglichst symmetrisch wird, aus demselben Grunde der oben beim trans-Fünfring angegeben. Werden die Winkel bei C_3 und C_5 gleich $109^0 28'$ gemacht, so liegt die Anordnung mit der



Figur 8.

geringsten Spannung vor. Hierbei müssen die Valenzen von C_1 und C_4 zusammengebogen, die von C_6 auseinandergespreizt werden.

Vergrößert oder verkleinert man die $\measuredangle$ C_3 und C_5, so ist damit auch eine gewisse Spannung der vorher noch unverbogenen Valenzen von C_3 und C_5 verbunden. Diese kann nicht vollkommen dadurch kompensiert werden, daß dafür die Valenzen von C_1 oder C_4 oder C_6 weniger verbogen werden. Denn eine Vergrößerung der Winkel C_3 und C_5 hat eine Verkleinerung der drei andern Winkel zur Folge. Die Valenzen von C_6 werden zwar weniger gespreizt, aber dafür müssen die Valenzen von C_1 und C_4 etwas mehr zusammengebogen werden. Bei Verkleinerung der $\measuredangle$ C_3 und C_5 ist es umgekehrt.

Berechnung der Spannung.

In Figur 8 folgt aus

$\triangle C_1 C_3 C_6 \cong \triangle C_4 C_5 C_6$:

$\measuredangle C_1 C_6 = C_4 C_6 = C_1 C_4 = 3{,}266$

$\measuredangle C_5 C_1 C_6 = \measuredangle C_3 C_6 C_1 = \measuredangle C_5 C_4 C_6 = \measuredangle C_5 C_6 C_4 = 35^0 16'$

Daraus im Fünfeck $\measuredangle C_1 = C_4 = 95^0 16'$ statt $127^0 56'$

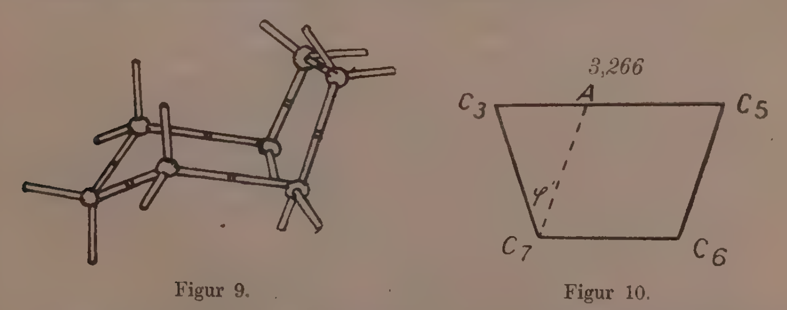
$\measuredangle C_3 = C_5 = 109^0 28'$ statt $109^0 28'$

$\measuredangle C_6 = 130^0 32'$ „

Die Spannung beträgt somit 2. $32^0 40' + 21^0 04' = 86^0 24'$; für eine Valenz der Atome $C_3 - C_6$ $10^0 48'$.

Trans-Siebenring am Sechsring.

Schließt man in der beschriebenen ebenen Anordnung von C_1, C_3, C_4, C_5 diese Kohlenstoffatome C_3 und C_5 nicht zum Ringe, sondern beläßt C_5 spannungsfrei an C_4, wie Fig. 6 zeigt, so ist der Abstand der Kettenendglieder $C_3 C_5 = C_1 C_4$, da $C_1 C_3 \parallel C_4 C_5$ Die Valenzrichtungen von C_3 und C_5 bilden mit der Ebene, zu der diese beiden Parallelen Normalen sind, denselben Winkel von $19^0 28'$, sind also keine windschiefen Geraden und müssen sich schneiden, wenn ihre Richtungen symmetrisch zu der durch C_2 gehenden Symmetrieebene des Gebildes sind. Durch passende Drehung um die Achsen $C_1 C_3$ und $C_4 C_5$ kann man ihnen jede beliebige Neigung von 0^0 bis $(180 - 2.19^0 28')^0$ gegeneinander geben. Bei einer Neigung von $109^0 28'$ liegt ihr Schnittpunkt im gleichen Abstande 2 von C_3 wie C_5; das bedeutet die bereits bekannte Möglichkeit eines spannungsfreien trans-Sechsringes. Man kann den Valenzen aber auch die Neigung solcher Valenzen zweier spiegelbildlich zueinander stehenden Kohlenstoffatome, die in einer Ebene liegen, geben. Dann zeigt sich, daß der Abstand dieser Valenzrichtungen in der Entfernung 2 von C_3 und C_5 fast genau gleich 2, dem normalen Abstande zweier Kohlenstoffatome C_6 und C_7 ist. Oder man kann auch umgekehrt sagen, daß der Abstand $C_3 C_5$ ungefähr gleich dem Abstand der Endglieder einer ebenen Kette von vier Kohlenstoffatomen ist: 3,266 gegen 3,333. Es läßt sich also ohne erhebliche Spannung ein Siebenring schließen.



Figur 9. Figur 10.

Ablenkung der Valenzen. Zur Berechnung denken wir uns wieder zwischen allen Kohlenstoffatomen die normale Entfernung hergestellt. So entsteht ein Trapez mit den Seiten:

$C_3 C_7 = C_5 C_6 = C_6 C_7 = 2$, $C_3 C_5 = 3{,}266$ $(= C_1 C_4)$ (Fig. 10).

Der Unterschied der Neigungswinkel der Geraden C_3C_7 und C_5C_6 gegen den normalen Neigungswinkel φ der Valenzen von C_6 und C_7, der $38^0 56'$ beträgt, gibt die Ablenkung.

Durch Ausrechnung des Trapezes ergibt sich der Neigungswinkel C_3C_7 gegen $C_5C_6 = \varphi'$ aus dem Δ C_3C_7A

$$(3{,}266 - 2)^2 = 8\,(1 - \cos\varphi'),\; \cos\varphi' = 0{,}79965$$

zu $\varphi' = 36^0 54'$.

$\varphi - \varphi' = 2^0 02'$, oder für je eine Valenz der nicht festen Atome $C_3 - C_7 = 12'$.

Diese geringe Ablenkung ist bemerkenswert; es ist daher auch der Cycloheptanring praktisch als spannungsfrei anzusehen. Diese Behauptung hat schon Werner[1]) aufgestellt, ohne jedoch das Modell und den Beweis der Spannungsfreiheit anzugeben. Die Verbrennungswärme des Cykloheptans weist übrigens auch darauf hin, daß in ihm keine wesentliche Spannung herrschen kann[2]).

Cis-Siebenring an Sechsring.

Aus der Art der Anordnung der Kohlenwasserstoffatome im Siebenring geht übrigens hervor, daß er sich ebenso wie in trans- auch in 1,2 cis-Stellung an einen Sechsring anlagern läßt. Denn die beiden Atome C_6 und C_7 stehen spiegelbildlich zu einander und ihre freien Valenzen liegen in zwei Ebenen.

Die Möglichkeit einen fast vollkommen spannungsfreien Siebenring aufzubauen (die Valenzablenkung beträgt für den isolierten Cykloheptanring 8,7' für eine Valenz) legt den Gedanken nahe nach weiteren spannungsarmen vielgliedrigen Ringen zu suchen. Tatsächlich sind solche aus folgendem leicht einzusehenden Grunde möglich. Die Entfernung von 1,3 Kohlenstoffatomen und 1,4 Kohlenstoffatomen in ebener Anordnung ist, wie oben berechnet, beinahe gleich (3,266 und 3,333). Die Tetraedersymmetrie der Kohlenstoffatome ermöglicht es, zwei Valenzen der Endglieder dieser Kette von drei oder vier Atomen in die gleiche Richtung zu bringen. Durch Aneinandersetzen zweier Ketten zu drei Atomen mit parallelen Valenzen gewinnt man den spannungsfreien Sechsring, bei Ketten von vier Atomen den Achtring, eine Kette von drei Atomen paßt nicht ganz genau auf die von vier und gibt den fast spannungsfreien Siebenring. Durch Ansetzen weiterer Kohlenstoffatome an die parallelen Valenzen gewinnt man neue Gebilde mit den gleichen

1) Werner, Lehrbuch der Stereochemie, S. 359.
2) B. 53, 1281 [1920].

Abständen der Endkohlenstoffatome 3,266 bezw. 3,333 und der Möglichkeit, freie Valenzen parallel zu stellen. Der Aufbau eines fast spannungsfreien Neunringes u. s. f., so wie der eines spannungsfreien Zehnringes u. s. f. bereitet also keinerlei Schwierigkeiten.

Praktische Bedeutung haben diese Konstruktionen aber kaum, denn die Wahrscheinlichkeit der Bildung solcher vielgliedrigen Ringe ist sehr gering. Die Begründung hierzu hat Mohr [1]) bereits klar ausgesprochen.

Über die Anlagerung zweier Ringe mit 1,3 Kohlenstoffatomen als Knotenpunkten sollen noch einige Bemerkungen angefügt werden, da auch dieser Fall für die Cholesterinchemie von Wichtigkeit ist. Wir beschränken uns hier auf die Wiedergabe der aus Modellbetrachtungen hervorgehenden Beobachtungen.

2 Fünfringe in 1,3 cis-Stellung. Dies ist der gründlich studierte Fall am Kampfer. Dieses bicyklische System ist zwar nicht spannungsfrei, doch ist die Spannung nur mäßig.

2 Fünfringe in 1,3 trans-Stellung. Dieses bicyklische System besitzt eine sehr starke Spannung.

Sechsring, in 1,3 Stellung cis-Fünfring: geringe Spannung.

Sechsring, in 1,3 Stellung cis-Sechsring: spannungsfrei.

Sechsring, in 1,3 Stellung trans-Fünfring: starke Spannung.

Sechsring, dazu in 1,3 Stellung trans-Sechsring: ziemlich starke Spannung.

Wir fügen noch kurz eine Überschlagsrechnung über die Spannung zweier Ringsysteme hinzu, die Zelinsky [2]) als spannungsfrei oder wenigstens nahezu spannungsfrei bezeichnet hat, eine Angabe, die von Mohr [3]) stark angezweifelt wurde. Es sind dies die Ringe, die durch Brückenbindung in 1,4 Stellung am Sechsring mit drei und vier Kohlenstoffatomen entstehen:

```
                                      CH
          CH                        / | \
        / | \                     /  CH2 \
    H2C  CH2 CH2              H2C     |    CH2
     |    |    |               |     CH2    |
     |   CH2   |               |      |     |
     |    |    |               |     CH2    |
    H2C  CH2 CH2              H2C     |    CH2
        \ | /                     \  CH2  /
          CH                        \ |  /
                                      CH
```

1) l. c. S. 352. 2) B. 34, 37, 99 (1901). 3) l. c. S. 322.

Der Abstand der drei Brückenkohlenstoffatome ist fast, der Abstand der vier genau gleich dem Abstand der 1,4 Kohlenstoffatome im Sechsring. Legen wir die Figur 1 zu Grunde, so ist die Neigung der Valenzen der 1,4 Kohlenstoffatome gegen ihre Verbindungslinie je $70^0 32'$; die Valenzen bilden miteinander den Winkel $38^0 56'$. Die beiden Brücken würden ohne nennenswerte bezw. ohne Spannung passen, wenn diese beiden Valenzen nicht den Winkel $38^0 56'$ bilden würden, sondern parallel stünden. Um die Valenzen in die parallele Lage zu bringen, ist eine Ablenkung von je $19^0 28'$ erforderlich. Bei der Dreierbrücke braucht sie nicht ganz so groß zu sein. Wir erhalten also Spannungen von etwa 35^0 bezw. 39^0, die sich auf 6 bezw. 8 Valenzen der Brückenatome verteilen, d. h. Valenzablenkungen von rund $5-6^0$ für eine Valenz. Die Systeme besitzen also merkliche, aber keine große Spannung.

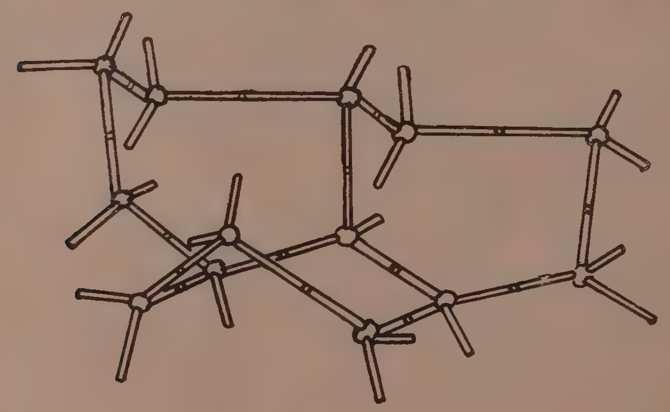
Tricyklisches System.

Die Verknüpfung dreier Sechsringe an einem Kohlenstoffatom, das allen drei Ringen gemeinsam ist, nach dem Schema des ebenen Formelbildes



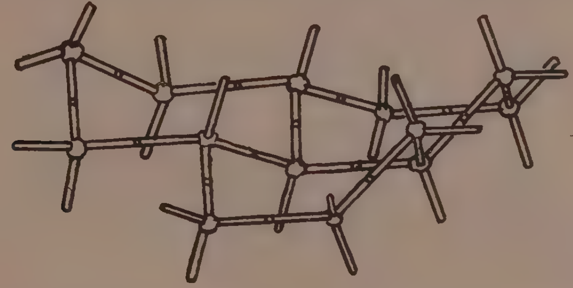
läßt vier Möglichkeiten zu.

Einmal können alle drei Ringe in cis-Stellung zueinander stehen; eine Form dieser Konfiguration zeigt Fig. 11. Aus dieser



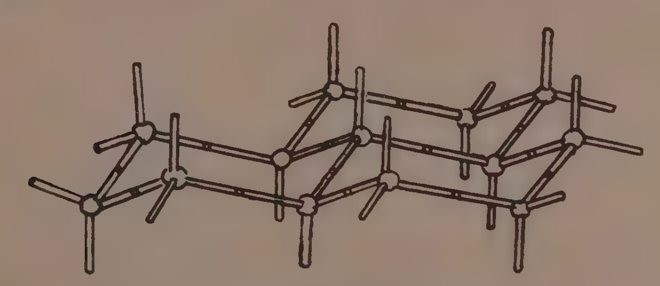
Figur 11.

Form lassen sich durch Umklappen von Kohlenstoffatomen wie bei ein- und zweikernigen Ringen mehrere andere ableiten, und es ist auch hier möglich, die cis-Valenzen der Ringe I und III und II und III, die in Fig. 11 um 60° gegeneinander verdreht sind, nach Belieben zwischen den Ringen I und III, oder II und III in die unverdrehte Lage zu bringen, die sie in Fig. 11 zwischen I und II einnehmen. Beim zweiten möglichen Fall kann Ring I zu II und III in cis-Stellung stehen, während II und III die trans-Lage einnehmen. Oder drittens steht Ring I zu II und III in trans-Stellung, II zu III in cis (Fig. 12). Schließlich können auch alle



Figur 12.

drei Ringe zueinander in trans-Stellung stehen (Fig. 13). Jedes dieser vier Modelle, von denen Fig. 11—13 drei Fälle darstellen, behält bei den Umwandlungen durch „Umklappen" seinen Charakter bei.



Figur 13.

Während das aus drei Sechsringen aufgebaute tricyklische System in allen seinen verschiedenen Formen spannungsfrei ist, gilt dies nicht mehr, wenn der eine Ring, z. B. II, ein Fünfring ist:



Ob dabei I und III zueinander in cis- oder trans-Stellung stehen, ist für Ring II gleich.

Steht Ring II in cis-Stellung zu I und III, so ist er praktisch spannungsfrei wie ein monocyklischer Fünfring. Steht er in trans-Stellung zu I und in cis-Stellung zu III (oder umgekehrt), so ist die Spannung mäßig (38° 56′, s. o.). Den gleichen Betrag hat die Spannung, wenn II zu I und III in trans-Stellung steht. Denn auch dann steht C_{10} invers zu C_5 und C_9, wie bei der Berechnung des trans-Fünfringes C_2 zu C_1 und C_4 invers stand (Fig. 6). Am Modell beobachtet man jedoch, daß sich ein Fünfring zu I in cis- und III in trans-Stellung leichter schließen läßt als einer, der zu beiden in trans-Stellung steht.

Dieser Unterschied liegt nicht in verschieden großer Spannung begründet, sondern darin, daß sich im Falle I trans, III cis- dem Fünfring II leichter eine annähernd ebene Konfiguration geben läßt als im Falle I trans-, III trans-. Dabei wandert — unter gewisser Zunahme der Gesamtspannung — durch Verdrehung von C_{10} Spannung in den trans-Sechsring I, in dem die trans-Valenzen von C_{10} und C_5 von 60° gegen 0° hin verdreht werden. Gleichzeitig werden auch die cis-Valenzen von C_{10} und C_9 im Ring III von 60° gegen 0° hin verdreht, aber bei dieser Operation des „Umklappens" tritt keine nennenswerte Spannung in Ring III auf.

Steht aber Ring III gleichfalls in trans-Stellung zu II, so werden auch hier trans-Valenzen von 60° gegen 0° hin verdreht, und in den Ring III wandert dieselbe Spannung wie in Ring I. Die Gesamtspannung wächst mithin doppelt so stark an, als wenn II nur zu I in trans-Stellung steht. Während sich im Fall I trans-, III cis- dem Fünfring II noch unter mäßiger Erhöhung der Gesamtspannung eine wenig gespannte Form geben läßt, so ist im Fall I trans-, III trans-, jeder Versuch, Ring II in seiner Spannung günstiger zu stellen, mit einer solchen Erhöhung der Gesamtspannung verbunden, daß die Existenz so gespannter Formen zu bezweifeln ist. Es liegt demnach nahe, anzunehmen, daß in der bedeutend „starreren" I trans-III trans-Form die Bildung eines Fünfrings II erheblich weniger begünstigt ist als in der minder starren III cis-I trans-Form, bei der, zum mindesten vorübergehend, ein Teil der Spannung von II in I abwandern kann.

Weitere Ringkombinationen zu besprechen würde zu weit führen, auch hat dies für die Konstitutionsermittelung des Cholesterins vorläufig noch kein Interesse.

Wir kommen nunmehr auf die eingangs gestellte Frage zurück, ob in der alicyclischen Reihe Ausnahmen von der Blanc'schen Regel

zu erwarten sind und wollen auf Grund der Studien am Modell darauf folgende zusammenfassende Antwort geben: Schon im einfachen Cyclohexanring ist die freie Beweglichkeit der Kohlenstoffatome eingeschränkt gegenüber derjenigen in einem Kohlenwasserstoff mit offener Kette: immerhin soll nach Mohr diese Beweglichkeit soweit erhalten geblieben sein, daß die verschiedenen Formen des Cyclohexanrings freiwillig ineinander übergehen können. Durch die Angliederung weiterer Ringsysteme kann die freie Beweglichkeit der Kohlenstoffatome noch weiter eingeschränkt werden. Bei spannungslosen Formen solcher Modelle können von drei oder vier normal verknüpften Kohlenstoffatomen das erste und dritte bezw. das erste und vierte niemals näher aneinander gerückt sein als dies in den entsprechenden Verbindungen mit offener Kette möglich ist. Es erscheint darum unwahrscheinlich, daß bei komplizierten hydro-aromatischen Verbindungen durch den besonderen Aufbau die Bildung von Drei- oder Vierringen begünstigt sein könnte und daß dadurch eine Ausnahme von der Blancschen Regel bedingt würde[1]). Anders liegen dagegen die Verhältnisse bei der 1,5 oder 1,6 Stellung von Kohlenstoffatomen. Bei Anordnung in offener Kette nehmen wir freie Drehbarkeit an und können dann das erste und fünfte bezw. sechste Kohlenstoffatom stets soweit nähern, daß ihre Entfernung etwa der normalen Entfernung zweier Kohlenstoffatome gleich wird. Bei ringförmigen Modellen von einer großen Starrheit ist dies aber nicht immer möglich, vielmehr werden, besonders bei gewissen trans-Stellungen, die 1.5 oder 1,6 Kohlenstoffatome weiter von einander entfernt stehen, und der Ringschluß wird erschwert oder unmöglich sein. Hier sind also Ausnahmen von der Blancschen Regel wahrscheinlich.

Durch solche Ausnahmen werden vielleicht die unsicheren und widerspruchsvollen Ergebnisse bedingt sein, die bei der Untersuchung über die Gliederzahl des Ringes II im Cholesterin erhalten worden sind.

Nehmen wir an, daß im Cholestan Ring I und II als Sechsringe in trans-Stellung mit einander verknüpft sind, was wir durch die Zeichen + und — an den gemeinschaftlichen Kohlenstoffatomen andeuten wollen:

```
        CH2 CH2
       /   \/   \
H2C  — CH   CH2
 |      |    |
H2C  + CH   CH2
       \   /\   /
        CH  CH2
```

1) S. indessen hierzu die Schlußbetrachtung.

hätte die Säure $C_{27}H_{46}O_4$ (II) aus Cholestan-4-on die Formel:

C H C
$H_2C - CH\ CH_2$
$HOOC + CH\ CH_2$
$COOH\ CH_2$ II

die Säure $C_{27}H_{46}O_4$ (VI) aus Cholestan-7 (oder 8)-on hätte die Formel

CH C
$H_2C\ CH - COOH$
$H_2C\ CH + COOH$
$CH_2\ CH_2$ VI

Im ersten Falle sitzen eine Carboxylgruppe und ein Wasserstoffatom an dem gemeinschaftlichen Kohlenstoffatom 5; es ist also nach zahlreichen Erfahrungen eine gegenseitige Umwandlung von cis- und trans-Form in einander möglich. Von diesen beiden wird die cis-Form leichter in ein cyklisches Keton übergehen als die trans-Form, und es ist also wahrscheinlich, daß sich das gebildete Keton von der cis-Form ableitet und folgendermaßen zu formulieren ist.

CH C
$H_2C - C\ CH_2$
$OC - CH\ CH_2$
CH_2

Bei der Säure $C_{27}H_{46}O_4$ (VI) ist jede Carboxylgruppe durch ein weiteres Kohlenstoffatom von den gemeinschaftlichen Kohlenstoffatomen 5 und 10 getrennt, ein Übergang der trans-Form in die cis-Form ist also wenig wahrscheinlich; bei der Ketonbildung würde sich ein Fünfring in trans-Stellung an einen Sechsring anlagern müssen. Dies ist nicht ohne eine gewisse Spannung möglich, und es bleibt zu untersuchen, ob diese Reaktion tatsächlich eintritt oder ob sich nicht statt dessen der fast spannungslose siebengliedrige Ring des Säureanhydrids bildet. Wenn es gelingt die cis- und trans-Form der Hexahydro-phenylendiessigsäure zu bereiten, kann die Frage experimentell entschieden werden.

Sollte sich dabei herausstellen, daß bei der Blanc'schen

Reaktion die Bildung des Fünfrings in trans-Stellung zu einem Sechsring noch erfolgt, müßte man zur Deutung der Erscheinung am Cholesterin ein tricyklisches System heranziehen.

Hier würde Ring I noch in einen Fünfring übergehen können, wenn er nur zu einem der beiden andern Sechsringe in trans-Stellung stehen sollte. Ring II würde aber möglicherweise nicht mehr in einen Fünfring übergehen, wenn er zu beiden Sechsringen in trans-Stellung steht.

Schlußbemerkung.

In der vorliegenden Arbeit haben wir versucht uns einen Überblick über die Spannungsverhältnisse komplizierter Ringsysteme zu verschaffen. Hierbei sind wir von der Annahme ausgegangen, daß die tetraëdersymmetrische Lagerung vierwertiger Kohlenstoffatome stets die stabilste sei, und daß als ein Maß für die Spannung die Ablenkung der Valenzen aus ihrer normalen Lage anzusehen sei. Wir haben also den möglicherweise vorhandenen Einfluß der Substitution am Kohlenstoff vernachlässigt und nicht zwischen sekundären, tertiären und quartären Kohlenstoffatomen unterschieden. Wir haben dies getan, weil wir keine Anhaltspunkte dafür besaßen, wie wir diesen Einfluß in Rechnung setzen sollten und auch vermuteten, daß er ziemlich gering sein würde.

Wir wollen indessen hervorheben, daß uns gerade über diesen Punkt neue experimentelle Untersuchungen notwendig erscheinen, ehe wir die in dieser Arbeit behandelte Frage für geklärt halten.

Die außerordentlich verschiedene Beständigkeit, die Cyclopropan- und Cyclobutanderivate je nach der Art der Substitution zeigen, scheint darauf hinzuweisen, daß hier besondere Verhältnisse vorliegen, die durch Modellbetrachtungen allein nicht zu entwirren sind[1]).

Wir halten es darum noch nicht für ausgeschlossen, daß bei eigenartig substituierten Verbindungen eine Bildung von Drei- oder Vierringen auch unter den thermischen Bedingungen der Blanc'schen Reaktion eintritt, wenn wir auch bisher noch keine solche Synthese beobachtet haben.

---

1) Experimentelle Untersuchungen in dieser Richtung und Versuche, diese theoretisch zu deuten, liegen in der Arbeit von Ingold (Soc. 119, 305 [1921]) vor, doch beziehen sich diese ausschließlich auf spirocyclische Ringsysteme.

Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes.

Von

Fritz Carlson in Uppsala und **Edmund Landau.**

Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung vom 8. Juli 1921.

Man verdankt Herrn Fabry[1]) folgenden wichtigen Satz: *Es sei λ_n ganz, $\geqq 0$ und beständig wachsend. Es sei $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$ oder auch nur $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$ habe endlichen Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist sie über den Kreis $|x| = r$ nicht fortsetzbar.*

Dieser Satz wurde später durch Herrn Faber[2]) und Herrn Pringsheim[3]) einfacher bewiesen. Es ist uns nun gelungen, lediglich unter Benutzung des letzten Teiles der Faberschen Methode einen neuen, überraschend kurzen Beweis zu erbringen. Dies wird in § 1 geschehen; da es nicht mehr Mühe macht, alsbald für Dirichletsche Reihen, bei denen $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ eine positive untere Schranke hat. Der entstehende Satz I ist neu; bekannt war nur durch Herrn Wennberg[4]) der Spezialfall $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$. Im § 2 beweisen wir einen noch allgemeineren Satz II.

---

1) *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III. Bd. XIII (1896), S. 367—399], S. 381—382; *Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers* [Acta Mathematica, Bd. XXII (1899), S. 65—87], S. 86.

2) *Über die Nicht-Fortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXIV (1904), S. 63—74].

3) *Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation* [ebenda, Jahrgang 1912, S. 11—92], S. 78—91.

4) *Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen* [Inauguraldissertation, Uppsala (1920), 66 S.], S. 3—7.

§ 1.

Satz I: *Es sei* λ_n *beständig wachsend,* $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$ *und ferner* $\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$. *Die Dirichletsche Reihe*

(1) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

habe endliche Konvergenzabszisse α. *Dann ist sie über die Gerade* $\sigma = \alpha$ *nicht fortsetzbar.*[5])

Vorbemerkungen: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei: 1) $\lambda_1 \geqq 1$. (Sonst lasse man vorn endlich viele Glieder weg.) 2) $\alpha = 0$ und der Nachweis der Singularität auf $s = 0$ beschränkt. (Sonst setze man $s - s_0 = s'$.) 3) $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq 1$. $\left(\text{Sonst setze man } \frac{s}{K} = s',\ K\lambda_n = \lambda_n' \text{ bei passendem } K.\right)$

Beweis: Wegen $\lambda_n > 0$, $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$. Wir betrachten für jedes $n \geqq 1$ die ganze Funktion

$$\varphi_n(x) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_\nu^2}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(n)} x$$

und zeigen für jedes $\delta > 0$ dreierlei:

(2) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu^{(n)}| r^\nu < A(\delta) e^{\delta r} \quad (r \geqq 0;\ A \text{ von } n, r \text{ frei});$$

(3) $$|c_\nu^{(n)}| < B(\delta) \frac{\delta^\nu}{\nu!} \quad (B \text{ von } n, \nu \text{ frei});$$

(4) $$\frac{1}{|\varphi_n(\lambda_n)|} < C(\delta) e^{\delta \lambda_n} \quad (C \text{ von } n \text{ frei}).$$

Zu (2): Wegen $\frac{n}{\lambda_n} \to 0$ ist $\eta_m = \operatorname{Max.}_{\nu > m} \frac{\nu}{\lambda_\nu} \to 0$. Für jedes $m \geqq 1$ ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu^{(n)}| r^\nu \leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_\nu^2}\right) \leqq \prod_{\nu=1}^{m} (1 + r^2) \prod_{\nu=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\eta_m r)^2}{\nu^2}\right)$$
$$\leqq (1 + r^2)^m \frac{\sin \pi i \eta_m r}{\pi i \eta_m r};$$

da $\pi \eta_m < \delta$ bei passendem $m(\delta)$ ist, ist (2) bewiesen.

---

5) Der Fabrysche Satz ist hierin enthalten, wenn man $x = e^{-s}$ setzt.

Zu (3): Aus (2) folgt

$$|c_\nu^{(n)}| < \frac{A\left(\frac{\delta}{e}\right)e^{\frac{\delta}{e}\frac{\nu e}{\delta}}}{\left(\frac{\nu e}{\delta}\right)^\nu} = A\left(\frac{\delta}{e}\right)\frac{\delta^\nu}{\nu^\nu} \leqq A\left(\frac{\delta}{e}\right)\frac{\delta^\nu}{\nu!} = B(\delta)\,\frac{\delta^\nu}{\nu!}.$$

Zu (4)[6]:

$$\frac{1}{|\varphi_n(\lambda_n)|} = \prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\frac{\lambda_n^2}{\lambda_\nu^2}-1}\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\lambda_n^2}{\lambda_\nu^2}} \leqq \prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}-1}\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^2}{(\lambda_\nu+\lambda_n)(\lambda_\nu-\lambda_n)}\right)$$

$$< \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu}{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)}\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\cdot\left(1+\frac{\lambda_n^2}{\lambda_\nu(\nu-n)}\right) \leqq \frac{\lambda_n^n}{n!}\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{(\lambda_n\sqrt{\eta_n})^2}{\nu(\nu-n)}\right)$$

$$< \frac{\lambda_n^n e^n}{n^n}\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(\lambda_n\sqrt{\eta_n})^2}{\mu^2}\right) = e^{e\lambda_n\cdot\frac{n}{e\lambda_n}\log\frac{e\lambda_n}{n}}\,\frac{\sin\pi i\lambda_n\sqrt{\eta_n}}{\pi i\lambda_n\sqrt{\eta_n}} < C(\delta)e^{\delta\lambda_n}.$$

Nun ist für $\sigma > 0$ nach (2)

$$|a_m|e^{-\lambda_m\sigma}\sum_{\nu=0}^{\infty}|c_\nu^{(n)}|\lambda_m^\nu \leqq |a_m|e^{-\lambda_m\sigma}A\left(\frac{\sigma}{2}\right)e^{\lambda_m\frac{\sigma}{2}},$$

also wegen $\frac{\lambda_n}{n}\to\infty$ allgemeines Glied einer konvergenten Reihe. Für $\sigma > 0$ ist daher

$$f_n(s) = a_n\varphi_n(\lambda_n)e^{-\lambda_n s} = \sum_{m=1}^{\infty}a_m e^{-\lambda_m s}\varphi_n(\lambda_m) = \sum_{m=1}^{\infty}a_m e^{-\lambda_m s}\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}\lambda_m^\nu$$

(5) $$= \sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}\sum_{m=1}^{\infty}a_m e^{-\lambda_m s}\lambda_m^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}(-1)^\nu f^{(\nu)}(s).$$

Gesetzt, $f(s)$ wäre für $s = 0$, also für $|s| \leqq 8\varrho$ bei passendem $\varrho > 0$ regulär. Dann wäre für $|s| < 4\varrho$ und jedes ν

(6) $$|f^{(\nu)}(s)| < K\frac{\nu!}{(4\varrho)^\nu},$$

wo K von s und ν frei ist. Nach (3) und (6) ist für $|s| < 4\varrho$

$$|c_\nu^{(n)}(-1)^\nu f^{(\nu)}(s)| < B(\varrho)\frac{\varrho^\nu}{\nu!}K\frac{\nu!}{(4\varrho)^\nu} = \frac{BK}{4^\nu},$$

6) $\prod\limits_1^0$ bedeute 1.

also die rechte Seite von (5) gleichmäßig konvergent, also $= f_n(s)$ und ferner absolut $< 2BK$. Daher wäre mit Rücksicht auf (4)

$$|a_n| e^{\lambda_n \varrho} = \frac{|f_n(-3\varrho)| e^{-2\lambda_n \varrho}}{|\varphi_n(\lambda_n)|} < 2BKC(\varrho) e^{-\lambda_n \varrho},$$

und (1) würde gegen die Voraussetzung für $s = -\varrho$ konvergieren.

§ 2.

Satz II: *Es sei λ_n beständig wachsend, $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$. Es werde $\omega_n = \underset{\nu \geqq n}{\mathrm{Min.}} \frac{\lambda_\nu}{\nu}$ gesetzt. Es gebe ein $k \geqq 0$ mit*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-(k+\delta)\omega_n} \text{ für } n \geqq n_0(\delta) \text{ bei jedem } \delta > 0.$$

Die Dirichletsche Reihe (1) habe endliche Konvergenzabszisse α. Dann ist $f(s)$ auf keinem Wege über die Gerade $\sigma = \alpha - k$ fortsetzbar.

Vorbemerkungen: 1) Wie in § 1. 2) Es darf $\alpha = 0$ angenommen und es braucht nur gezeigt zu werden, daß der Punkt $s = -k$ nicht auf einem Regularitätswege erreicht werden kann.

Beweis: $\varphi_n(x)$ bedeute dasselbe wie in § 1. (2) und (3) ergeben sich wie dort, da die Annahme über $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ hierfür nicht benutzt wurde. Statt (4) beweisen wir jetzt

$$\frac{1}{|\varphi_n(\lambda_n)|} < e^{(k+\delta)\lambda_n} \text{ für } n \geqq n_1(\delta). \tag{7}$$

Es ist [7])

$$\frac{1}{|\varphi_n(\lambda_n)|} \leqq \prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} < \lambda_\nu < \lambda_n(1+\delta) \\ \lambda_\nu \neq \lambda_n}} \frac{1}{\left|\frac{\lambda_n^2}{\lambda_\nu^2} - 1\right|} \prod_{\lambda_\nu \geqq \lambda_n(1+\delta)} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_\nu^2}} = \Pi_1 \Pi_2.$$

Für $0 < x \leqq \frac{1}{1+\delta}$ ist

$$\frac{1}{1-x} = e^{x + \frac{x^2}{2} + \cdots} \leqq e^{\frac{x}{1-x}} \leqq e^{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)x};$$

wegen

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\nu - (\nu-1)}{\lambda_\nu^2} \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu \left(\frac{1}{\lambda_\nu^2} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}^2}\right) \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\omega_n} \left(\frac{1}{\lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)\left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)$$

$$< \frac{2}{\omega_n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right) = \frac{2}{\lambda_n \omega_n}$$

7) Π_1 bedeute 1, wenn kein $\lambda_\nu \neq \lambda^n$ der Strecke angehört.

und $\omega_n \to \infty$ ist also für $n \geqq n_2(\delta)$

$$|\Pi_2| \leqq e^{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\lambda_n^2 \sum\limits_{\lambda_\nu > \lambda_n(1+\delta)} \frac{1}{\lambda_\nu^2}} < e^{2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\frac{\lambda_n}{\omega_n}} < e^{\delta\lambda_n}.$$

Es sei λ_q das größte $\lambda_\nu < \lambda_n(1+\delta)$. Für $n \geqq n_3(\delta)$ haben je zwei konsekutive λ_ν der Strecke $\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} < \lambda_\nu < \lambda_n(1+\delta)$ ihren Abstand $> e^{-\omega_q(k+\delta)} = z$. Daher ist[6]), mit $\mu_1 \geqq 0$, $\mu_2 \geqq 0$, $\mu_1 + \mu_2 < q = o(\lambda_n)$,

$$|\Pi_1| \leqq \prod_{\varkappa=1}^{\mu_1} \frac{1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \varkappa z} - 1} \prod_{\varkappa=1}^{\mu_2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \varkappa z}} \leqq \prod_{\varkappa=1}^{\mu_1} \frac{\lambda_n}{\varkappa z} \prod_{\varkappa=1}^{\mu_2} \frac{\lambda_n(1+\delta)}{\varkappa z}$$

$$= \frac{\lambda_n^{\mu_1}}{\mu_1!} \frac{(\lambda_n(1+\delta))^{\mu_2}}{\mu_2!} \frac{1}{z^{\mu_1+\mu_2}} \leqq \left(\frac{e\lambda_n}{\mu_1}\right)^{\mu_1} \left(\frac{e\lambda_n(1+\delta)}{\mu_2}\right)^{\mu_2} \frac{1}{z^q}$$

$$= e^{e\lambda_n \frac{\mu_1}{e\lambda_n} \log \frac{e\lambda_n}{\mu_1} + e\lambda_n(1+\delta) \frac{\mu_2}{e\lambda_n(1+\delta)} \log \frac{e\lambda_n(1+\delta)}{\mu_2} + q\omega_q(k+\delta)}$$

$$\leqq e^{o(\lambda_n) + \lambda_q(k+\delta)} \leqq e^{o(\lambda_n) + \lambda_n(k+\delta) + \delta\lambda_n(k+\delta)} < e^{\lambda_n(k+\delta(2+k+\delta))}$$

für $n \geqq n_4(\delta)$. Für $n \geqq n_5(\delta)$ ist also

$$\frac{1}{|\varphi_n(\lambda_n)|} < e^{\lambda_n(k+\delta(3+k+\delta))},$$

womit offenbar (7) bewiesen ist.

Für $\sigma > 0$ wird (5) wie in § 1 gezeigt. Gesetzt nun, es gebe von $s = 1$ aus in der Halbebene $\sigma > -k$ einen Regularitätsweg, der in $s = -k$ mündet. Dann wäre $f(s)$ bei passendem $\varrho > 0$ in jedem Kreise $|s - s_0| \leqq 8\varrho$ um ein s_0 des Weges regulär. (6) gilt also bei passendem K innerhalb der Kreise $|s - s_0| < 4\varrho$. Die rechte Seite von (5) würde also schließlich für $|s + k| < 4\varrho$ die Funktion $f_n(s)$ darstellen und zeigen, daß

$$|a_n| |\varphi_n(\lambda_n)| e^{\lambda_n(k+3\varrho)} < 2B(\varrho)K$$

ist; folglich wäre wegen (7) für $n \geqq n_1(\varrho)$

$$|a_n| e^{\lambda_n \varrho} < 2BKe^{-\lambda_n \varrho}.$$

(1) würde also gegen die Voraussetzung für $s = -\varrho$ konvergieren.

Bemerkung über die Hardy-Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem[1].

Von

H. Weyl in Zürich.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Juli 1921 von E. Landau.

Die schwierige Untersuchung der „major arcs“[2]) mit ihrem von vornherein nicht zu überblickenden Ergebnis kann durch eine ganz elementare Abschätzung ersetzt werden, wenn man mit einer etwas höheren unteren Grenze für die Anzahl s sich zufrieden gibt; nämlich durch diejenige Abschätzung, welche die Verf. selber auf S. 37 ihrer Arbeit nur heuristisch benutzen.

Ich verwende die Bezeichnungen von W. P. $O_\varepsilon(n^\alpha)$ bedeutet: $O(n^{\alpha+\varepsilon})$ für jedes feste $\varepsilon > 0$. Die über alle ganzen Zahlen h im Bereich $h \geqq 0$, $h^k < n$ zu erstreckende Summe

$$U_n(\xi) = \sum_h e(\xi h^k) = \sum_h x^{h^k} \qquad [x = e(\xi)]$$

ist für reelles irrationales ξ gleich $o(n^{1/k})$. Will man eine gleichmäßig in ξ gültige Abschätzung bekommen, so muß man natürlich nicht von den irrationalen, sondern gerade von rationalen $\xi \left(= \frac{p}{q}\right)$ ausgehen; dann gelangt man mit der in meiner Arbeit „Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. 1“[3]) entwickelten Beweismethode zu dem folgenden Satz, der etwas allgemeiner ist als das Lemma 4 in W. P.:

I. Ist α ein positiver Exponent $\leqq \frac{1}{k}$ und $n^\alpha \leqq q \leqq n^{1-\alpha}$, so gilt

$$U_n\left(\frac{p}{q}\right) = O_\varepsilon\left(n^{\frac{1}{k} - \frac{\alpha}{K}}\right).$$

Der Sinn der Einschränkungen für q ist klar: damit sich die triviale Ungleichung $|U_n| \leqq n^{1/k}$ verschärfen läßt, muß 1) $\xi = \frac{p}{q}$

1) Göttinger Nachr. 1920, S. 33—54; wird zitiert als W. P.

2) S. 44—50 a. a. O. und E. Landau, Gött. Nachr. 1921, S. 88—92.

3) Math. Ann. 77 (1916), S. 326—331.

„hinreichend irrational", d. h. q groß sein, und 2) muß der Punkt $e\left(\frac{h^k}{q}\right)$, wenn h^k kontinuierlich von 0 bis n wächst, auf dem Einheitskreis eine große Anzahl von Umläufen vollendet haben. Der Beweis ist übrigens wörtlich und vollständig in dem Beweise des Hardy-Littlewoodschen Lemma 4 gegeben. Das Lemma 1, soweit wir es hier brauchen, nämlich als die Aussage $S_{p,q} = O_\varepsilon(q^\varkappa)$, ist in I. als der Spezialfall $\alpha = \frac{1}{k}$, $n = q^k$ mitenthalten. Wie man die Abschätzung auf die Brüche mit niedrigem Nenner und auf solche Umgebungen der Brüche ausdehnt, die zusammen den ganzen Einheitskreis der x-Ebene bedecken, wollen wir nicht an U_n darstellen, sondern an dem Verhalten von

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^{h^k}$$

bei Annäherung von x an den Einheitskreis.

Aus I. finden wir unter den gleichen Voraussetzungen über den Bruch $\frac{p}{q}$ durch „partielle Summation" [1]): Auf demjenigen Teile des Kreises Γ: $|x| = 1 - \frac{1}{n}$, auf welchem $\left|x - e\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqq \frac{2}{n}$ ist [2]), gilt

$$(*) \qquad f(x) = O_\varepsilon\left(n^{\frac{1}{k} - \frac{\alpha}{K}}\right).$$

Nehmen wir also jetzt die Einteilung in Teilbögen durch die Farey-Reihe von der Ordnung $n^{1-\alpha}$ vor und unterscheiden die major und minor arcs von einander durch die Bedingung $q \leqq n^\alpha$, bezw. $q > n^\alpha$, so gilt gleichmäßig auf allen minor arcs die Beziehung (*). Der Unterschied gegenüber W. P. ist nur der, daß der Exponent α anstelle von $\frac{1}{k}$ benutzt wird.

Auf dem zum Bruch $\frac{p}{q}$ $(q \leqq n^\alpha)$ gehörigen major arc setzen wir $x = e\left(\frac{p}{q}\right) \cdot e^{-\eta}$; es ist dann

$$f(x) = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(h^k p) \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\eta (lq + h)^k}.$$

Von den inneren Summen betrachten wir die eine, dem Werte $h = 0$ entsprechende; das Studium der andern ist analog. Ist

1) W. P., S. 43; Weyl, l. c., S. 333.

2) An Stelle des Zählers 2 auf der rechten Seite kann natürlich auch irgend eine andere feste Zahl treten.

zunächst η reell und positiv, so ist

$$1+\int_0^\infty e^{-Yt^k}dt > \sum_{l=0}^{\infty} e^{-Yl^k} > \int_0^\infty e^{-Yt^k}\,dt \quad (Y = \eta q^k),$$

also liegt

$$\vartheta(Y) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-Yl^k} - \int_0^\infty e^{-Yt^k}\,dt$$

zwischen 0 und 1. Andrerseits ist bei beliebigem Y (partielle Integration)

$$e^{-Yl^k} - \int_l^{l+1} e^{-Yt^k}\,dt = \int_l^{l+1} (l+1-t)\,kYt^{k-1}e^{-Yt^k}\,dt.$$

Ist der Realteil $\Re Y = y > 0$, so gilt daher

$$|\vartheta(Y)| \leqq \frac{|Y|}{y}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\int_l^{l+1}(l+1-t)\,e^{-yt^k}kyt^{k-1}\,dt.$$

Die unendliche Summe auf der rechten Seite ist aber $= \vartheta(y) < 1$, und wir finden

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{-Yl^k} = \frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)Y^{-\frac{1}{k}} + O\left(\frac{|\eta|}{\Re\eta}\right).$$

Auf dem major arc, wo

$$\Re\eta \sim \frac{1}{n}, \qquad |\Im\eta| \leqq \frac{4\pi}{qn^{1-\alpha}}$$

ist, bekommt man

$$f(x) = \frac{S_{p,q}}{q}\cdot\frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\eta^{-\frac{1}{k}} + O(n^\alpha).$$

Um Übereinstimmung zwischen den Abschätzungen auf den beiden Arten von Bögen zu erzielen, werden wir α so wählen, daß

$$\frac{1}{k} - \frac{\alpha}{K} = \alpha \text{ ist, also } \alpha = 1/k\left(1+\frac{1}{K}\right).$$

Dann haben wir den Satz 8. 3 in W. P. mit dem Exponenten α statt des etwas kleineren $\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{K}\right)$ gefunden und damit die gleichmäßige Abschätzung von $f(x)$ auf dem ganzen Kreise Γ.

Das Weitere genau wie in W. P.; es ergibt sich, wenn $s > 2K$ ist,

$$\frac{r_{k,s}(n)}{n^{(s/k)-1}} = CS + O_\varepsilon\left(n^{-\frac{\alpha}{K}}\right) + O_\varepsilon\left(n^{1-\frac{s\alpha}{K}}\right).$$

Damit die linke Seite gegen den asymptotischen Ausdruck CS konvergiert, genügt es jedenfalls, daß

$$s > \frac{K}{\alpha} = k(1+K)$$

ist; in W. P. wird statt dessen nur $s > kK$ gefordert. Der Kunstgriff, welchen Hardy und Littlewood in der anschließenden Arbeit Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 14—27 (Absatz 2) angeben, drückt die untere Grenze $k(1+K)$ herab auf $(k-2)K+(k+2)$.

Die experimentelle und die biologische Hypnose bei Limnotrechus lacustris.

2. Teil der Untersuchungen über experimentelle Hypnose bei Insekten und ihre Beziehungen zum Berührungsreiz.

Von

R. W. Hoffmann.

Vorgelegt von Herrn Ehlers in der Sitzung vom 22. Juli 1921.

In meiner ersten Arbeit[1]) über experimentelle Hypnose bei Insekten weise ich im Kapitel „Berührungshypnose“ darauf hin, daß Limnotrechus lac., obgleich bei ihm Thanatose nicht beobachtet wird, doch gelegentlich im Freien durch passiven Berührungsreiz in Hypnose versetzt wird. Hierauf will ich nun zunächst eingehen. Für gewöhnlich hält sich das Tier auf dem Spiegel stehender Gewässer auf, auf dem es äußerst geschickt herumrudert oder springt, wobei nur die Distalenden seiner gespreizten Beine die Wasseroberfläche berühren, während der Körper schwebend über ihr getragen wird. Letzteres gilt auch für die schreitende oder hüpfende Bewegung auf horizontaler fester Fläche. Gelegentlich klettert nun das Insekt an festen Gegenständen, die auf dem Wasser schwimmen wie Korke, Holzklötze, oder an rauhen Wänden empor. Gerät hierbei sein Körper in Berührung mit der Unterlage, so tritt Hypnose ein mit allen typischen Erscheinungen. Hierbei scheinen z. T. die feinen Härchen an der Unterfläche des Körpers eine Rolle zu spielen. Limnotrechus ist ein typisches Augentier, das namentlich bei guter Beleuchtung und warmem Wetter außerordentlich prompt auf optische Reize reagiert. Nähert man einem Wasserspiegel mit Limnotrechen bei solchen Bedingungen die Hand, so stieben alle Tiere wie von Entsetzen erfaßt auseinander, und zwar ist es in diesem

1) Siehe „Untersuchungen über experimentelle Hypnose bei Insekt. und ihre Beziehungen zum Berührungsreiz“. 1. Mitt. Nachricht. K. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. 1921.

Fall gleich, ob sie im Augenblick der Annäherung ruhig auf der Wasserfläche ruhen oder umherrudern. Umsomehr sticht hiervon das Benehmen der mit der Unterlage in innigem Kontakt befindlichen Individuen ab: Sie sind unempfindlich gegen optische und Berührungsreize, sowie gegen jede Lageveränderung. Man kann z. B. einem auf einem Pfropfen sitzenden Tier jede beliebige Stellung im Raum geben, ohne daß sich Korrektionsbewegungen einstellen. Desgleichen herrscht weitgehende Analgesie. Ich fand außerdem mit dieser Art von t. Hypnose häufig eine sehr eigenartige Beinstellung verbunden. Während bei Tieren, die auf einem Wasserspiegel schwimmen oder auf fester Fläche ruhen, sämtliche Beine weit abgespreizt sind. werden hier die beiden ersten Extremitätenpaare parallel zu einander und zur Körperachse nach vorne gesetzt. Femur und Tibia jedes Beines bilden hierbei einen so spitzen Winkel mit einander, daß sie ebenfalls fast parallel laufen [1]).

Das oben geschilderte Verhalten von Limnotrechus, das auch in freier Natur vorkommen dürfte, kann man als biologische Berührungshypnose bezeichnen. Man sollte nun denken, daß es leicht sein müßte, auch auf experimentellem Wege diese Wirkung zu erzielen. Dies ist indessen nicht der Fall. Während nach Holmes bei der nah verwandten Ranatra linearis schon eine zarte Berührung genügt, um Thanatose zu erzeugen, verursacht Berühren oder Indiehandnehmen von Limnotrechus nur Fluchtreaktion oder Abwehrbewegungen. Die Ursache für die biologische Hypnose des Tieres beruht zweifellos auf Summation feinster Berührungsreize (vermutlich durch Vermittelung der feinen Haare des Unterkörpers), die sich experimentell nicht so leicht nachmachen läßt. Immerhin gelang es mir in einigen Fällen durch aktiven Berührungsreiz (siehe meine erste Mitteilung) Hypnose zu erzeugen. Im Ganzen standen jedoch die Resultate hinter jenen bei Blatta zurück: Aufdenrückenlegen eines lebensfrischen Tieres führte in allen Fällen zur Umkehr. Durch Niederdrücken des Körpers auf Watte und Festhalten in Zwangslage kann jedoch auch hier Hypnose (Hemmungshypnose) erzielt werden. Gleichzeitige Anwendung von aktivem Berührungsreiz löste nicht immer

1) Daß diese charakteristische Beinstellung, bei deren Vorhandensein man immer auf Hypnose schließen darf, nicht stets auftritt, sagte ich schon; gelegentlich findet man auch Tiere mit weit ausgebreiteten Beinen an Glaswänden in Hypnose. Ja, es braucht sogar nicht einmal der Rumpf in direkter Berührung mit dem Substrat zu sein, auf welchem das Tier sitzt: stets ist dies dann aber im weitesten Maße bei den Extremitäten der Fall.

eine nachweisbare Wirkung aus. In andern Fällen war sie allerdings eklatant. Auch insofern herrscht gegenüber der Hypnose von Blatta ein Unterschied, als in vielen Fällen keine vollständige Inaktivität besteht. Der Rüssel, oder wenigstens sein distaler Teil, macht alsdann fortgesetzt Suchbewegungen, die allerdings so schwach sein können, daß sie erst bei Lupenbenützung sichtbar werden[1]).

Tabelle 1.

Hemmungshypnosen auf Linoleumplatte bei gleichzeitiger Einwirkung von „aktivem Berührungsreiz“[2]).

1.	4", 9", 22", 16", 20", 12", 10", 19", 6", 63", 30", 17", 42", 14", 15", 10", 16", 12", 23", 15".
2.	23", 22", 30", 7", 21", 100", 51", 35", 101", **256"**, **898"**, **972"**.
3.	4", 7", 4", 3", 2", 0", 3", 3", 0", 3", refraktär.
4.	24", 16", 71", 130", 77", 9", 26", 23", 20", 43", 221", 139", 366", 588".
5.	In 10 Versuchen refraktär.
6.	In 10 Versuchen refraktär.
7.	In 10 Versuchen refraktär, sodann bei Wattefaserbetupfung: **57"**, **35"**, **62"**, **65"**, **143"**, **395"**, 30", 140".
8.	4", 5", 4", 5", 5", 4", 5", 5", 6", 8", **20"**, 8", **10"**, **72"**, **23"**, **189"**, **315"**.
9.	4", 5", 6", 8", 4", 6", 7", 5", 6".
10.	4", 5", 6", 5", 6", 7", 4", 5", 4", 6", 7", **48"**, **230"**.
11.	2000", sodann sich selbst überlassen, nach 113" Umkehr.
12.	352", 90", 61", 290", 330", 248", 241", 485", 1140", 580", 355".
13.	1140", 580", 355".
14.	5", 7", 12", 8", 7", 10", 7", **286"**, 14", 24", 12".

1) Meines Erachtens handelt es sich trotz dieser geringen Bewegungserscheinungen um echte Hypnosen, da alle andern Bedingungen hierzu erfüllt sind. Mangold und Scymanski sprechen übrigens ebenfalls noch von Hypnose, wenn während der Akinese eines Arthropoden die Fühler bewegt werden.

2) Fettgedruckte Zahlen bedeuten Hypnose unter Anwendung von aktivem Berührungsreiz, unterstrichene Zahlen bedeuten völlige Inaktivität.

In der vorstehenden Tabelle von 14 Versuchen handelt es sich um Serien aufeinander folgender Hypnosen. Jede Zahl gibt eine Inaktivitätsperiode in Sekunden an. Bei den fett gedruckten Zahlen wurde während der Hypnose noch aktiver Berührungsreiz durch Wattefaserbetupfung angewandt. Nur wo eine Zahl unterstrichen ist, herrscht vollständige Inaktivität.

Wir sehen also im allgemeinen in Limnotrechus eine Form, die nicht gerade leicht hypnotisch zu beeinflussen ist[1]). In den meisten Fällen bestand überdies während der Hypnose schwache Rüsselbewegung. Dieses Verhalten deutet m. E. auf einen geringeren Hypnosegrad hin. Im allgemeinen ist die längere Hypnose auch die tiefere, doch trifft dies nicht überall zu (z. B. nicht in Nr. 8). Erst später hatte ich auch Versuche auf Watte vorgenommen, wobei ich etwas günstigere Resultate erzielte. Daß der aktive Berührungsreiz auch bei dieser Versuchsanordnung hypnoseverlängernd wirken kann, scheint mir am überzeugendsten aus Serie Nr. 14 hervorzugehen. Ich erwähne noch, daß es mir ebenso wie bei Blatta gelang, Tiere in Watte in hypnotischem Zustand auf den Kopf zu stellen. Die Dauer der Einwirkung war verschieden. In vielen Fällen währten die Ruhezustände nur etwa 20 Sekunden, gelegentlich jedoch bis zu 20 Minuten.

Hypnose und Katalepsie durch Erfassen (Erfassungshypnose).

Während Versetzung in Zwangslage, sowie Einwirkung von passivem und aktivem Berührungsreiz, keineswegs immer zu Bewegungslosigkeit führt, gibt es ein viel sichereres Mittel, um dies zu erreichen: — das schnelle Erfassen des ruhenden Tieres mit einer feinen Pinzette. Der hierdurch erzeugte Zustand der Inaktivität trägt in jeder Beziehung den Charakter der tierischen Hypnose. Zur schnellen Kenntlichmachung der Methode bezeichne ich sie als Erfassungshypnose, womit also über die Qualität der Hypnose nichts weiter ausgesagt werden soll. Am besten erreicht man sein Ziel, wenn man — vertikal nach abwärts stoßend — das Femur eines sitzenden Tieres in der Mitte erfaßt

1) Diese Feststellung ist besonders interessant in Bezug auf die Dauer der später zu erörternden Erfassungshypnosen. Es dürfte hieraus auch klar hervorgehen, daß es sich hier nicht um Thanatose (Sichtotstellen) handelt.

und das Insekt schnell über den Wasserspiegel erhebt[1]). Sämtliche Merkmale der tierischen Hypnose sind vorhanden, nämlich

1. Vollständige Inaktivität,
2. Aufhebung des Lagekorrektionsvermögens,
3. Herabsetzung der Reizempfindlichkeit,
4. Kataleptische Zustände in verschiedenem Grade,
5. Ausgesprochene Analgesie.

Dies gilt nun im Einzelnen zu prüfen: Zunächst mögen einige Bemerkungen über die Widerstandskraft des Limnotrechus gegen äußere Insulte folgen: Alle anderen Insekten, die ich bisher darauf untersuchte, reagieren auf Ergreifen eines ihrer Beine und Emporheben daran durch heftiges Zappeln. In vielen Fällen löst sich nach kürzerer oder längerer Zeit die Extremität vom Körper oder sie wird stark geschädigt. Bei Limnotrechus geschieht ersteres nie; letzteres kann eintreten, hat dann aber keinen Einfluß auf das Experiment. Das Chitin des Tieres ist ziemlich hart, der Körper starr. Andrerseits haben die Tiere ein gewisses Feuchtigkeitsbedürfnis. Läßt man sie 24 Std. im Trocknen, so gehen sie meist zu Grunde, während sie auf einem reinen Wasserspiegel 3 Monate und länger ohne Nahrung zubringen können; 6—8 Std. können sie jedoch sehr gut im Trocknen weilen. Um jede Schädigung der Tiere durch Trockenheit auszuschließen, hänge ich sie über einem Wasserspiegel auf, wobei sie tagelang am Leben bleiben.

Nicht immer ist es jedoch nötig, daß ein Tier, das durch Pinzettenerfassung in Hypnose versetzt werden soll, sich in absoluter Ruhe befindet. Häufig gelingt das Experiment auch bei sich putzenden oder mit dem Rüssel herumsuchenden Tieren, ja gelegentlich sogar bei Individuen, die gerade einige Schreitbewegungen machen. In diesem Falle erlischt beim Erfassen sofort die Bewegung.

Die Dauer der nun folgenden Hypnosen ist abhängig von äußeren und inneren Faktoren. Zunächst von einem gleichmäßigen Druck der Pinzette. Bei einiger Vorsicht ist dies ohne jedes Hilfsmittel zu erreichen, indem man zwischen die mit Daumen und Zeigefinger gehaltenen beiden Pinzettenflügel ein Stück der Fingerbeere des Mittelfingers einschiebt; hierdurch wird ein gleich-

1) Derselbe Effekt wird auch beim Erfassen eines anderen Körperteiles — Kopf, Brust, Abdomen — erreicht. Nur läuft man hierbei Gefahr, das Tier bei zu starkem Zugreifen zu verletzen.

mäßiger Druck gewährleistet. Man hat auf diese Weise den Vorteil, jederzeit nach Belieben mit größter Vorsicht das Insekt in verschiedene Lagen bringen zu können. Will ich es in völliger Ruhe beobachten und an ihm in einer bestimmten Stellung experimentieren, so spanne ich die Pinzette mit dem Tier in eine Klammer und hänge sie nach Belieben in ein Stativ, an dem sich ein verstellbarer Arm befindet, der in eine automatisch sich schließende Zange ausläuft. Die beiden Teile der letzteren umwickele ich mit Watte, so daß sich die Pinzette leicht zwischen ihnen hin und her bewegen läßt. Der Pinzettendruck übt in dieser Anordnung eine starke Quetschung auf das Bein aus. Sie hat jedoch keinerlei Einfluß auf das Experiment und bedroht auch nicht das Leben des Tieres.

Außer einer gewissen Konstanz des Pinzettendrucks ist ruhige Haltung für die Dauer der Hypnose von Wichtigkeit. Es gelingt jedoch bei vorsichtiger Behandlung das Tier weite Strecken von dem Ort, an dem es unbeweglich geworden ist, fortzuführen. Die Bewegung muß nur gleichmäßig und nicht zu schnell geschehen.

Während der Erfassungshypnose besteht vollständige Inaktivität. Auch der Rüssel, der am leichtesten beweglich ist, rührt sich nicht. Die Aufhebung des Lagekorrektionsvermögen zeigt sich darin, daß man das Tier in jegliche Lage — Rückenlage, Seitenlage, Kopfstellung — bringen kann, ohne daß es aufwacht oder mit irgend einer Bewegung auf die Drehung reagiert. Die Reizempfindlichkeit ist stark vermindert: Wechselnde Beleuchtung, schnelles Vorbeiführen eines dunklen Gegenstandes vor seinem Kopfende, schwächere Geruchsreize, akustische und ziemlich starke Berührungsreize erzeugen keinerlei Abwehraktionen. Eine der häufigsten und auffallendsten Nebenerscheinungen der Erfassung ist kataleptische Starre der Beine. Ich werde in einer andern Arbeit zeigen, daß die Stellung der Extremitäten, je nach dem Ort wo die Erfassung erfolgt, eine verschiedene ist. Die zweite Begleiterscheinung der tierischen Hypnose, die Analgesie, die auch bei dem ruhenden Tier in geringerem Maße vorhanden ist, erlangt bei dem erfassungshypnotischen Tier den höchstmöglichen Grad. Nicht nur, daß man bei schnellem Schnitt ohne Reaktion die einzelnen Extremitäten abtragen kann, es gelingt auch, große Teile des Abdomens zu amputieren, ohne daß Aufwachen oder eine größere Bewegung erfolgt (höchstens ein schwaches Zucken). Die Tiere verhalten sich hierin also ganz analog den kataleptischen Stabheuschrecken.

Wenn darüber kein Zweifel besteht, daß die Ursache der Er-

fassungshypnose eben die Erfassung ist, so ist es doch ebenso sicher, daß es andere Momente gibt, welche diesen Zustand zeitweilig wieder aufheben. Sonst müßte ein auf diese Weise hypnotisiertes Tier, von dem man alle äußeren störenden Einflüsse fernhält, dauernd bis zu seinem Tode in Bewegungslosigkeit verharren. Dies ist nicht der Fall. Über kurz oder lang erfolgt Erwachen, an das sich heftige Zappelbewegungen, die unter Umständen längere Zeit in unverminderter Stärke anhalten können, anschließen. Die Hypnosezeiten sind, auch bei möglichster Ausschließung aller äußeren Störungen, sehr verschieden. Sie können wenige Sekunden bis eine Stunde und mehr dauern. Während bei den Experimenten mit Niederdrücken der Individuen in Rückenlage nach längeren Versuchen an Ermüdung, vielleicht sogar an gelegentliche Schädigung der Individuen, gedacht werden könnte, scheidet dies Moment bei der Pinzettenerfassung aus. Selbst eine starke Beinquetschung hat für das Leben des Tiers keinerlei Bedeutung[1], da hierbei niemals eine Wunde mit Bluterguß auftritt. Läßt man ein erfassungshypnotisches Tier los, so hüpft es ebenso frisch wieder weg wie vorher.

Wenn ich sagte, daß die Dauer der Bewegungslosigkeit solcher momentan erstarrten Tiere eine sehr verschiedene ist, so scheint doch soviel festzustehen, daß die Hypnose sehr jugendlicher Formen im allgemeinen von sehr viel kürzerer Dauer ist. Hierin besteht also eine Übereinstimmung mit verschiedenen anderen Tieren[2]. Eine Differenz im Verhalten beider Geschlechter konnte ich nicht finden.

Um eine Vorstellung von der verschiedenen Dauer solcher Zustände zu geben, lasse ich nachfolgend 31 erstmalige Hypnosen, die sofort nach Pinzettenerfassung eintraten (Primärhypnosen) folgen.

13" juv., 16" juv., 22" juv., 42" juv., 55" juv., 132", 135", 140", 165", 172", 247" med., 248" juv., 250", 281", 282" med., 352", 415", 500", 705", 720", 743", 760", 833", 900" . ., 981", 1170", 1391", 1500" . . juv., 1875", 3000" . ., 3415", 4120"[3].

Wir sehen, es gibt gewaltige Unterschiede in den Hypnosezeiten. Am häufigsten dauern sie einige Minuten; es besteht indessen kein Zweifel darüber, daß die angegebenen Werte, infolge aller-

1) Sogar gewaltsames Abreißen von Beinen, das bei diesen Experimenten nicht in Betracht kommt, wird ohne Schädigung ertragen.

2) Eine Ausnahme von dieser Regel bildet das viertletzte jugendliche Tier der vorstehenden Tabelle.

3) Punkte hinter der Zahl bedeuten, daß die Hypnose unterbrochen wurde.

hand äußerer Einflüsse, viel zu klein sind. Ich glaube jedoch, daß dieser Fehler ohne größere Bedeutung für die Beurteilung der nachfolgenden Untersuchungen sein wird.

Was geschieht nun aber, wenn die Erfassung keine plötzliche war und das Tier zappelnd in der Pinzette hängt? Es könnte zweierlei eintreten: Entweder es erfolgt keine Beruhigung oder doch nur eine solche, während welcher nur die stärkeren Bewegungen eine Weile aussetzen, oder es tritt nach einiger Zeit des Zappelns echte Hypnose ein. Durch Fall 1 wäre bewiesen, daß das auslösende Moment für die Erfassungshypnose von der Plötzlichkeit der Erfassung abhängt. Für Fall 2 würde dies Moment wegfallen: das Festhalten allein müßte die Hypnose erzeugen. Dies ist in der Tat der Fall. In kürzerer oder längerer Zeit gerät jedes Tier, also auch das anfangs zappelnde, in Hypnose. Allerdings muß das schnelle Zufassen die Hypnose begünstigen, sonst würde sie nicht bei einem solchen sofort eintreten. Wir haben hier nur eine Parallele zu der Schokwirkung, welche auch bei der Hypnose der höheren Tiere eine Rolle spielen kann [1]).

Läßt man ein Tier längere Zeit an der Pinzette hängen, so folgen Serien von Hypnosen aufeinander, die durch Zappelperioden von einander geschieden sind. Über die Dauer dieser Aktivitätszeiten läßt sich nichts voraussagen. Es gibt Tiere, die bis zu einer halben Stunde zappeln oder sich in latenter Ruhe befinden, ehe sie in Hypnose geraten. Andere wieder machen nur wenige, kurze Bewegungen, worauf Hypnose eintritt. Wenn es sicher ist, daß hierbei individuelle Dispositionen wirksam sind, so muß doch auch die augenblickliche Lage des aufgehängten Insekts eine Rolle spielen, denn innerhalb ein und derselben durch äußere Einflüsse nicht gestörten Serie treten häufig ganz regellos die verschiedensten Zeitintervalle der Bewegungs- und Hypnoseperioden auf. Ich lasse nun eine größere Anzahl Hypnoseserien folgen. Jede Hypnose wird von der andern durch ein Bewegungsintervall getrennt. In vielen Fällen sind die Bewegungszeiten gegenüber den Hypnosezeiten äußerst gering. Manchmal handelt es sich nur um ein einziges Aufzucken. Je länger die Serie ist, desto kürzer sind im allgemeinen die Bewegungsintervalle.

---

1) Man könnte sich die Rolle der Schokwirkung etwa so vorstellen, daß hierbei auf das Tier sofort der höchste Grad des die Hypnose auslösenden Reizes einwirkt. Hierdurch wird dem Tiere keine Zeit zu Abwehrbewegungen gelassen. Der Reiz wirkt unmittelbar. Bei in Abwehrbewegungen befindlichen Tieren wirkt hingegen die Erregung der Hypnose entgegen, denn diese ist ja eine tonische Lähmung.

Tabelle 2.

Serien aufeinanderfolgender Erfassungshypnosen.

Ordnungszahl	Tier	Serie	Bemerkungen.
Nr. 15	♀	1875", 1290", 510", 385".	
Nr. 16	♀	1170", 90", 678", 2160".	
Nr. 17	♂	760", 362", 635", 180".	Das Tier hatte kurz vorher kopuliert.
Nr. 18	♀	720", 782", 2222" *, 1925" *, 180", 485".	* Hier hatte sich das Tier mit der rechten Seite an die Pinzette angelegt.
Nr. 19	♀	250", 888" *, 530" *, 155".	* Wie in Nr. 18
Nr. 20	♀	981", 1205", 1682".	
Nr. 21	♀	281", 103", 5450".	
Nr. 22	Larve	771", 1469", 3014", 485", 152".	Rechtes Vorderbein u. linker Fühler regeneriert.
Nr. 23	♀	114", 13", 213", 22", 12", 211", 15", 215", 375", 1142".	
Nr. 24	♀	26", 21", 15", 16", 12", 35", 150", 123".	
Nr. 25	♀	67", 175", 405", 463", 1169", 390", 340", 1579".	

Die obenstehende Tabelle soll nun eine Vorstellung von der Dauer der unbeeinflußten Erfassungshypnosen geben. Die Hypnosezeiten verhalten sich auf ihr sehr ungleichmäßig, und zwar gilt dies nicht nur für das Gesamtresultat, sondern auch für die Glieder der einzelnen Serie. Ganz offenbar spielen hierbei Faktoren eine Rolle, die wir nicht kennen. Wenn in einer Serie wie Nr. 21 nach einer Hypnose von 5′ und einer von 2′ plötzlich eine solche von über 1½ Stunden folgt, oder in Nr. 23 nach 9 Hypnosen unter 7′ eine von über 19′, oder in Nr. 25 unter 6 Hypnosen unter 7′ plötzlich eine von 19′19″ und eine von 26′19″ auftaucht — so muß das seine Gründe haben. In einigen Fällen glaube ich nun aber die hypnoseverlängernde Ursache gefunden zu haben: Sie beruht hier im Berührungsreiz. Betrachten wir Serie Nr. 18, so finden wir im 3. Glied eine Verlängerung der Hypnosendauer von 13′ auf 37′ (genau von 782″ auf 2222″). Hierauf folgt eine solche von 32′ (1925″) und dann eine solche von 3′ (180″) und später

von 8' (185"). Wie man aus der bezüglichen Bemerkung in der Tabelle ersieht, fallen die beiden mittleren hohen Werte zusammen mit einer besonderen Lage des Versuchstiers: Während dasselbe nämlich in der durch die 1., 2., 5. und 6. Zahl charakterisierten Hypnose frei in der Luft schwebte, hatte es sich bei Versuch 3 und 4 an die festhaltende Pinzette angelegt. Dieselbe Erscheinung wurde auch für das 2. und 3. Glied der Serie Nr. 19 festgestellt. Für Serie Nr. 23 und Nr. 25 gilt diese Erklärung für die betreffenden abnorm hohen Zahlen nicht. Hier spielt wahrscheinlich ein andrer Faktor, den ich an dieser Stelle nicht näher erwähnen will, eine Rolle.

Erfassungshypnose und passiver Berührungsreiz.

Beobachtungen wie die obige veranlaßten mich nun, planmäßig zu untersuchen, ob auch bei der Erfassungshypnose der Berührungsreiz hypnoseverlängernd wirkt. Zu diesem Zwecke wurde zunächst mit drei verschiedenen Stoffen, die ich an verschiedene Stellen des Körperstamms brachte, experimentiert.

Tabelle III.

Erfassungshypnosen bei gleichzeitiger Einwirkung passiven Berührungsreizes[1]).

Ordnungszahl	Tier	Serie	Gegenstand	Berührungsstelle	Bemerkungen
No. 26	♀	**900"**, 88", 122", 291", **538"**, 95", **1742"**, 790".	Holzkeil	Abdomen, ventral	1. und 5. Hypnose nur leichte Berührung einer begrenzten Stelle, 7. Hypnose ausgiebige Berührg.
No. 27	♀	833", 150", 185", 85", **3600"** ...	Holzkeil	Abdomen, ventral	Die 5. Hypnose nach einer Stunde unterbrochen.
No. 28	♀	140", 913", 605", 240", 242", **480"**, **165"**, **166"**, 122", 83", 150".	Wattefasern	Abdomen, ventral	
No. 29	♂	**270"**, **2110"**, **480"**, **1025"**, **182"**, **143"**.	Holzkeil	Thorax, ventral	
No. 30	♀	**10800"** ...	Holzkeil	Abdomen, dorsal	Versuch nach drei Stdn. unterbrochen.

1) Die fett gedruckten Zahlen geben die Dauer der Hypnosen an, die unter dem Einfluß von passivem Berührungsreiz standen.

Tabelle III (Fortsetzung).

Ordnungszahl	Tier	Serie	Gegenstand	Berührungsstelle	Bemerkungen
No. 31	♀	3340″.	Holzkeil	Abdomen, dorsal	Nach dem Aufwachen erfolgte 5″ lebhafte Zappelbewegungen, dann sofort Erstarrung.
No. 32	♀	1865″, 1385″, 1442″, 305″, 95″, 182″.	Wachsstück	Rücken	
No. 33	♀	3600″ ...	Wachsstück	Rücken	Versuch nach einer Stunde unterbrochen
No. 34	♀	362″, 903″, 904″, 3600″ ...	Wachsstück	Versuch 1—3 dorsal Thorax, No. 4 dorsal, Abdomen	Letzter Versuch nach einer Stunde unterbrochen.
No. 35	♀	856″, 6015″.	Wachsstück	dorsal, Mitte des Körpers	

Wenn wir die vorstehende Tabelle mit der vorhergehenden vergleichen, so läßt sich bei einiger Überlegung deutlich die Wirkung des Berührungsreizes erkennen[1]). Man gewinnt dabei den Eindruck, daß ein positiver Einfluß weniger von der Art des Stoffes als von der Druckstärke abhängt. Leichte Berührungsreize, wie sie durch Wattefasern erzeugt werden, hatten keinen Erfolg (No. 28). Daß die hypnoseverlängernde Wirkung des Kontakts nicht auf die Unterstützung des Körpers und eine hierdurch verursachte Verminderung der Zugwirkung zurückzuführen ist, geht aus No. 30—35 hervor. Hier wurde trotz Berührung von oben eine bedeutende Hypnoseverlängerung erzielt, während anderseits gerade bei No. 29. wo der Holzkeil ventral vom Thorax — also an der für eine Unterstützung günstigsten Stelle — angebracht worden war, keine Hypnoseverlängerung verursacht wurde. In No. 26, 27, 32, 34 dauern die Kontakthypnosen bedeutend länger

1) Ich will nicht leugnen, daß die obigen Versuche etwas zweckmäßiger hätten angestellt werden können, etwa durch Vermehrung der alternativen Serien. Ich bitte jedoch zu berücksichtigen, daß es sich hier um tastende Versuche handelt, die zunächst das Problem in verschiedener Weise in Angriff nehmen sollten (Einfluß der Art des berührenden Stoffes, des Druckes, der Abhängigkeit vom Ort der Berührung usw.). Ich werde sie später systematisch und ausgedehnt weiter führen.

als die gewöhnlichen. In No. 27, 30, 31, 33, 34, 35 zeigen überdies die ersteren so hohe Werte, wie sie in keinen der auf Tabelle II angegebenen unbeeinflußten Serien vorkommen, obgleich die Hypnosen mehrfach vor Ablauf abgebrochen wurden (No. 27, 30, 34). Sehr instruktiv ist das Verhalten von No. 30, wo ein Individuum 3 Stunden unter meinen Augen bewegungslos blieb, sodaß ich schließlich meine Beobachtung aus Erschöpfung aufgeben mußte. Die einzige Veränderung, die ich während dieser Zeit wahrnahm, war nach Ablauf der ersten Stunde eine durch äußere Erschütterung hervorgerufene kurze krampfhafte Reflexbewegung. Als am Ende des Experiments der Holzkeil entfernt wurde, begannen sofort lebhafte Zappelbewegungen, die 6 Minuten ununterbrochen anhielten und dann in über 20′ andauernde Putz- und Scheuerbewegungen des letzten Beinpaares übergingen. Das Tier wurde nun frei gelassen, worauf es sofort weghüpfte. Am andern Tage war es völlig frisch.

Bei den bisherigen Versuchen war streng darauf geachtet worden, daß keine Berührung der Beine, besonders nicht der Tarsen, mit irgend einem Gegenstand erfolgte. Geschieht eine solche während der Hypnose, so wird sofort der Umkrallungsreflex ausgelöst, der in geeigneten Fällen zum Festhalten des betreffenden Gegenstandes führt, womit dann die Bewegung ihr Ende erreicht hat. Der hierdurch erzeugte Berührungsreiz wirkt ebenfalls hypnoseverlängernd.

Derselbe Effekt wird nun auch durch Berührung der Tarsen mit einem Flüssigkeitsspiegel hervorgerufen. Bringt man die zappelnden Beine eines Tieres tarsal mit einer Wasserfläche in Berührung, so erfolgt meist augenblickliche Beruhigung; in andern Fällen wird die Bewegung wenigstens sofort stark verringert und hört bald gänzlich auf. Die auf diese Weise beeinflußten Hypnosen zeigen ebenfalls fast durchweg eine ganz bedeutende Erhöhung ihrer Zeiten. Es ist dabei nicht einmal nötig, daß sämtliche Beine den Wasserspiegel berühren. (Siehe Tabelle IV folgende Seite.)

Die Versuche lassen — mit Ausnahme von Serie No. 40, die völlig normal erscheint — durch ihre ungewöhnlich hohen Zahlenwerte die Beeinflussung durch den Berührungsreiz erkennen; um so mehr als die Hypnosen vielfach künstlich unterbrochen wurden. Serie 41, in welcher alternierend je ein Berührungsversuch mit einem Nichtberührungsversuch abwechselt, zeigt ebenfalls außerordentlich deutlich die Wirkung der Kontaktreize. Von Interesse ist auch, daß schon die Tarsen zweier Beine zur Beeinflussung genügen.

Tabelle IV.

Erfassungshypnosen bei gleichzeitiger Einwirkung des Berührungsreizes eines Wasserspiegels auf die Tarsen.

Ordnungszahl	Tier	Serie	Berührung des Wasserspiegels durch die Tarsen
No. 36	♀	**9000″** . . .	sämtlicher Beine
No. 37	♀	**5400″** . . .	des 2. und 3. rechten Beines
No. 38	♀	**3665″** . . .	des 2. und 3. rechten Beines
No. 39	♀	**2448″**, **2820″**, **9000″** . . .[1])	1. Versuch: des 2. und 3. linken Beines. 2. Versuch: des 2. und 3. rechten Beines. 3. Versuch: dito.
No. 40	♀	**240″**, **106″**, **45″**.	des 2. und 3. rechten Beines
No. 41	♀	**451″**, 205″, **410″**, 211″, **976″**, 316″, **375″**, 349″, **3343″**, 464″, **4500″** . . .	sämtlicher Beine

Reflexerregbarkeit des erfassungshypnotischen Tieres.

Wenn man die Tarsen eines frei an der Pinzette hängenden, hypnotischen Limnotrechus in Beziehung zu einem Gegenstand bringt, den man langsam senkt, so ist das Tier bestrebt, in Fühlung mit ihm zu bleiben. Es dehnt alsdann seine Extremitäten so lange, bis es die Berührung mit ihm verliert; zugleich versucht es, die Tarsalkrallen in ihn einzuschlagen. Wenn es sich um ein Papierblättchen handelt, so wird dasselbe hierdurch in freischwebender Lage festgehalten. Auch dieser Berührungsreiz verursacht zunächst eine Verlängerung der Hypnose. Indessen wirkt ihm die Zugkraft des Gegenstandes entgegen. Letztere verursacht allmählich eine Kontraktion der Extremitätenmuskeln, was zu einer Beugung der Beine führt. Nach einiger Zeit erfolgt dann aber eine Erschlaffung der Muskulatur und hierdurch ein Fallenlassen des Papierstücks. Die plötzliche Entlastung sowie die Aufhebung des Berührungs-

1) Nach $2^1/_2$stündiger ununterbrochener Beobachtung mußte ich das Tier seinem Schicksal überlassen. Ich traf es 18 Stunden später noch in derselben Lage über dem Wasser hängend (was natürlich kein strikter Beweis dafür ist, daß es ebenso lange in Hypnose verharrte). Beim Loslassen aus der Pinzette war es völlig frisch.

reizes führen dann meistens zum Erwachen des Tieres und zu Zappelbewegungen. Man kann den Kontraktionsreiz noch anschaulicher machen, wenn man nur an das eine Vorderbein eines vertikal nach abwärts gerichteten hypnotisierten Tieres einen Wattebausch hängt. Es erfolgt dann eine ganz allmähliche Beugung der Extremität. Daß Zappelbewegungen unter Umständen auch schon durch die Wirkung des Gewichts ausgelöst werden können, läßt sich übrigens bei größerer Belastung leicht demonstrieren. Überschreitet sie ein gewisses Maß, so erfolgt nach einiger Zeit auch dann eine Bewegungsreaktion, wenn der Gegenstand noch in den Tarsalkrallen hängt.

Einen sehr eigenartigen Reflex zeigt das erste Beinpaar, wenn es ventralwärts mit einem Gegenstand in Berührung kommt. Es sucht sich alsdann um ihn herumzuschlagen. Am deutlichsten kann man dies wiederum an einem Papierblättchen zeigen. Bringt man ein solches auf den Objekttisch einer Lupe und erhöht man ihn durch Drehen der Mikrometerschraube bis zur Berührung mit den Beinen des Insekts, so erfolgen bei weiterem Drehen Korrektionsbewegungen. Das Papierblättchen wird hierbei immer weiter nach hinten geschoben, bis die ersten Beine seinen vorderen Rand erreicht haben. Im selben Augenblick legen sich die Tibia-Tarsalabschnitte der Unterseite des Papiers an. Die Kontraktion der Beinmuskulatur ist hierbei so kräftig, daß ein Tier allein mit seinen Vorderbeinen geraume Zeit (eine Viertelstunde und länger) ein Stück Papier zu halten vermag, das bedeutend größer und breiter als es selbst ist. Noch besser geht dies natürlich, wenn es hierbei von 1—2 Beinen unterstützt wird. Ich lasse wieder 2 Beispiele folgen.

Tabelle V.

Erfassungshypnosen bei gleichzeitiger Einwirkung des Klammerreflexes.

Ordnungszahl	Tier	Serie	Bemerkungen
No. 42	♀	3555″, 2782″.	Großes Papierstück, festgehalten von den Vorderbeinen und der untergeschlagenen hinteren Tibia
No. 43	♀	3480″.	dito, Blatt festgehalten vorwiegend durch die Vorderbeine

Es ist nun nicht nötig, zu diesem Versuch ein größeres Blatt Papier zu nehmen. Läßt man die beiden Vorderextremitäten nur

einen schmalen Streifen erfassen, so bewirkt der Berührungsreiz (vielleicht verbunden mit der krampfhaften Kontraktion) ebenfalls eine bedeutende Verlängerung der Hypnose, ja der Erfolg wird durch die geringere Schwere des Gegenstandes noch erhöht. In einem Fall hielt ein Tier einen solchen Streifen 5700" unbeweglich fest und geriet erst bei seinem Fallenlassen in Bewegung.

Erfassungshypnose und aktiver Berührungsreiz.

Nachdem sich der passive Berührungsreiz als zweifellos hypnoseverlängernd bei der Erfassungshypnose erwiesen hatte, war zu erwarten, daß der aktive Berührungsreiz mindestens ebenso wirkungsvoll sein würde. Dieses ist nun auch der Fall. Allerdings stellte es sich heraus, daß dieser Berührungsreiz im Gegensatz zu den Befunden bei Blatta, wo ein leichtes Betupfen mit einer Wattefaser genügte, seinen höchsten Wirkungsgrad erhielt, wenn er nicht zu fein dosiert war. Eine sehr auffällige Nebenerscheinung des aktiven Berührungsreizes bilden starke Tonusschwankungen der Muskulatur, also kataleptische Erscheinungen. Es ist natürlich zu berücksichtigen, daß schon die Erfassungshypnose, ohne darauf folgenden aktiven Berührungsreiz, Tonuserhöhungen zur Folge hat. Abgesehen hiervon lassen sich jedoch durch aktiven Berührungsreiz noch besondere Wirkungen erzielen. Bewegt man einen Körperanhang eines erfassungshypnotischen Limnotrechus mit einer Nadel hin und her, so nimmt ganz allgemein sein Muskeltonus rasch zu[1]), und zwar um so mehr, je weiter er am hinteren Teil des Körpers liegt, sodaß an den Antennen die geringsten Tonuserhöhungen, an den letzten Beinen die stärksten erzeugt werden.

Im Anfang einer Erfassungshypnose, die nicht „Subitanhypnose" ist (bei welcher, wie erwähnt, sofort starke Erhöhung des Muskeltonus eintritt), weichen die Antennen häufig bei ganz minimalem Anstoß weit zurück, nach mehrfacher Berührung bildet sich jedoch eine deutliche Flexibilitas cerea aus. Sehr empfindlich sind zuerst auch noch die vorderen Beine. Auf Verschiebung reagieren sie gelegentlich noch über die Bahn der anstoßenden Nadel hinaus. Bei stärkerem Reiz kann sich ihre Bewegung auch der korrespondierenden Extremität mitteilen. Schon nach wenigen Berührungen gelangen sie jedoch in den Zustand der wachsartigen Biegsamkeit.

1) Man kann diese Erscheinung, im Hinblick auf ein bekanntes Krankheitsheitsbild des Menschen, dessen hervorstechendstes Zeichen eine Starre in den Muskeln bildet, die durch äußere Eingriffe nur noch vermehrt wird (Kraepelin), als Katatonie bezeichnen.

— Während im oberen Femurgelenk der mittleren Beine schon gleich im Anfang ziemliche Starre herrscht, finden wir im Femur-Tibialgelenk zuerst Flexibilitas cerea. Nach wenigen Reizungen erhöht sich jedoch der Muskeltonus merklich und kann dann zu einer solchen Starrheit der Gelenke führen, daß Streckbewegungen nur nach Überwindung größerer Widerstände erzielt werden können, während Beugebewegungen allerdings sehr viel leichter zu vollführen sind. Dauert der Berührungsreiz längere Zeit an, so wird schließlich ein solcher Katalepsiegrad erzeugt, daß jede gewaltsame Bewegung des Beines durch sofortiges Zurückschnellen wieder ausgeglichen wird. Zu bemerken ist, daß sich die Tonuserhöhung über das Reizgebiet hinaus, jedoch vorwiegend auf die Beine derselben Seite erstreckt. Was die hintersten Extremitäten anbelangt, so zeigen sie schon gleich im Anfang eine große Starrheit.

Da es nun möglich erscheint, den Katalepsiezustand eines erfassungshypnotischen Tieres durch aktiven Berührungsreiz stets auf ein gewisses Maß zu bringen, und weiterhin bei Limnotrechus Katalepsie und Hypnose stets mit einander vergesellschaftet erscheinen, so ergibt sich die Frage, ob wir nicht im aktiven Berührungsreiz stets ein Mittel haben, die Erfassungshypnose beliebig zu verlängern. Die Experimente, die ich Mitte Juli des vergangenen Jahres an reifen Tieren hierüber anstellte, schienen in der Tat diese Erwartungen zu bestätigen. (Siehe Tabelle VI folgende Seite.)

No. 43—46 zeigen ganz einwandfrei am letzten Serienglied eine Einwirkung des aktiven Berührungsreizes in einer kolossalen Steigerung der Hypnosedauer. Als ich in diesem Jahr dieselben Versuche erneuerte, hatte ich unter 25 Serien nur einmal (No. 47) einen ähnlichen Erfolg. Die hypnoseverlängernde Wirkung des aktiven Berührungsreizes ließ sich allerdings auch hier in fast allen Serien einwandfrei nachweisen. (Siehe die Beispiele 47—57). Wie ist nun dieser Unterschied zu erklären? Ich kann hier nur eine Vermutung aussprechen: Meine Untersuchungen im Jahre 1920 fallen in die Geschlechtsperiode des Tieres, die diesjährigen wurden jenseits derselben angestellt. Während ich 1920 in der ersten Julihälfte noch sehr häufig Copulae beobachtete, fand ich im August 1921 nicht eine, trotz sehr reichen Beobachtungsmaterials. Ich schließe daraus, daß in der Geschlechtsperiode in höherem Maße ein Stoff produziert wird, der hypnosebegünstigend (oder gar ermöglichend) wirkt. Diese Hypothese wird durch Tatsachen, die ich in einem späteren Abschnitt berichte, noch annehmbarer werden.

Tabelle VI.

Erfassungshypnosen, zum Teil unter gleichzeitiger Einwirkung von aktivem Berührungsreiz.

Ordnungszahl	Tier	Serie	Bemerkungen
No. 43	♀	504″, 672″, 404″, **3600″** ...	Mitte Juli 1920
No. 44	♀	1235″, 409″, 528″, **3600** ...	Mitte Juli 1920
No. 45	♀	68″, 33″, 126″, 35″, 203″, 308″, 366″, 140″, **3600″** ...	Mitte Juli 1920
No. 46	♀	299″, 163″, 616″, **3600″** ...	Mitte Juli 1920
No. 47	♂	61″, 230″, 382″, **3600″** ..., 245″, 325″, 305″.	Ende August 1921
No. 48	♂	100″, 113″, 40″, 187″, 40″, **780″**.	Ende August 1921
No. 49	♂	135″, 110″, 238″, 123″, 229″, **664″**.	Ende August 1921
No. 50	♂	130″, 472″, 453″, **1621″**.	Ende August 1921
No. 51	♂	75″, 40″, 242″, 72″, 114″, 195″, **940″**, **1204″**.	Ende August 1921
No. 52	♀	317″, **732″**, 245″, **1125″**.	Ende August 1921
No. 53	♀	46″, 15″, (12′ Zappeln) 90″, 35″, 15″, 22″, 58″, 67″, **316″**.	Ende August 1921
No. 54	♀	49″, 67″, 30″, 42″, 112″, **312″**, 35″, 32″, **297″**.	Ende August 1921
No. 55	♀	12″, 42″, 32″, 75″, 20″, **135″**, 42″, 22″, **135″**, 18″, 66″.	Ende August 1921
No. 56	♀	300″, **671″**, 167″, 255″, **550″**, 136″.	Ende August 1921
No. 57	♀	30″, 152″, 78″, 69″, 121″, **1033″**.	Ende August 1921

Was die Methode zur Erzeugung des aktiven Berührungsreizes anbelangt, so ließ ich für die Versuche von 1920 zwischen zwei beliebigen Extremitäten in regelmäßigen Intervallen (3—5 Sek.) eine Nadel hin- und herwandern, wobei mit jeder Berührung meist ein Abbiegen und Erschüttern des ganzen Tierkörpers verbunden war. In der Versuchsreihe von 1921 ließ ich mit gleichem Erfolg zum Teil auch eine Wattefaser hin- und herpendeln. Eine positive Wirkung läßt sich jedoch auch bei örtlich beschränktem

aktivem Berührungsreiz erzielen. Hört man mit dem Berühren auf, so dauert die (bereits verlängerte) Hypnose noch eine Weile an. Wie ich oben erwähnte, wird durch den Berührungsreiz der Muskeltonus des berührten Körperteiles fast augenblicklich erhöht; nach einigen Minuten der Nichtberührung kann diese Wirkung wieder verflogen sein. Daß der aktive Berührungsreiz auch bei einem zappelnden, pinzettierten Tier zu Hypnose und Katalepsie führen kann, zeigt die Tatsache, daß sich ein solches Individuum in wenigen Sekunden beruhigt, wenn man ihm mit einem Gegenstand einige schnelle Streiche versetzt. Es ist allerdings zu erwägen, ob die Ursache des Effekts nicht auf eine Schokwirkung zurückzuführen ist, zumal die Berührung in diesem Fall — gegenüber dem aktiven continuierlichen Berührungsreiz — eine außerordentlich derbe ist [1]).

Ist die Erfassungshypnose wirklich eine t. Hypnose?

Obgleich alle Kriterien dafür zu sprechen scheinen, daß wir es in dem durch Erfassung erzeugten Zustand der Bewegungslosigkeit mit einer echten tierischen Hypnose zu tun haben, so mag doch bei genauerer Prüfung ein Zweifel darüber aufsteigen, ob diese Deutung richtig ist.

Das was sich als ein Besonderes der Erfassungshypnose gegenüber den bis jetzt besprochenen Hypnoseformen darstellt, sind zwei Momente:

1. die scheinbar sehr verschiedene Art ihrer Erzeugung,
2. das Verhalten des akinetischen Tieres nach Aufhebung der Pinzettierung.

Was den ersten Punkt anbelangt, so erledigt er sich ziemlich schnell, da die Methode zur Erzeugung der Erfassungshypnose nicht gar zu sehr von jener, die zur Hemmungshypnose führt, verschieden ist. Ihr Hauptunterschied beruht im Wesentlichen in der örtlichen Begrenzung des Reizgebietes. Aber auch hierin findet sich eine Parallele zu einer andern Hypnoseform, nämlich der Thanatose, wo ebenfalls die Berührung einer beschränkten Körperstelle zum Erfolg führt. Sonst unterscheiden sich die Reize nur quantitativ von einander.

1) Ich möchte dieses Experiment in Parallele zu dem in meiner ersten Arbeit mitgeteilten Wattekragenversuch bei Blatta setzen. Hier zeigte ich, daß dieses Tier durch Umlegen einer Watteschicht um den Körper zur Akinese veranlaßt werden kann, die bedeutend verlängert wird, wenn man es gleichzeitig in intermittierende derbe Berührung mit einem harten Substrat bringt.

Das zweite Moment, das aus mehreren Teilpunkten besteht. könnte allerdings einen weit ernsteren Einwand gegen die Auffassung der Erfassungsakinese als Hypnose abgeben. Hierauf soll nun nachfolgend näher eingegangen werden.

Keine der bisher von andern und mir studierten Hypnosen endigt abrupt: stets vermittelt eine Art Somnolenzstadium zwischen Hypnose und Wachzustand. Anderseits ist die Hypnose eines Individuums in andern Fällen nur bis zu einem gewissen Grad abhängig von den sie verursachenden Reizen. Am deutlichsten zeigt sich dies bei der Hemmungshypnose, wo der hemmende Reiz naturgemäß nur bis zum Eintritt der Akinese andauert. Auch der konstant wirkende passive Berührungsreiz der Unterlage, der ja, wie wir gesehen haben, in vielen Fällen für die Hypnosedauer in Betracht kommt, kann hier wenigstens zum Teil eliminiert werden. indem man das hemmungshypnotische Tier an einer Extremität aufhängt. —

Beide Momente scheinen nun nicht zu gelten, wenn man einen erfassungshypnotischen Limnotrechus aus der Pinzette befreit: Augenblicklich erlangt er seine volle Bewegungsfreiheit. Die Hypnose scheint also nach dieser Beobachtung nur so lange anzudauern, als die Pinzette das Tier festhält. Wäre dies wirklich der Fall, so hätten wir gegenüber den andern, als t. Hypnose bezeichneten Akinesen einen fundamentalen Unterschied, und wir hätten dann allen Grund, an dem Hypnosecharakter dieser Erscheinung zu zweifeln. Es ist mir nun aber gelungen. nachzuweisen, daß sich die Erfassungshypnose bei geeigneten Vorkehrungen genau so verhält wie die durch andere Methoden erzeugten Hypnosen. Mit andern Worten, es ist möglich, die Erf.-Hypnose auch nach Aufhören des sie verursachenden Reizes — d. h. der Erfassung — im Gange zu halten. Bringt man nämlich das erfassungshypnotische Tier im Augenblick der Pinzettenöffnung in Rückenlage auf irgend ein festes Substrat, so dauert der Zustand der Erstarrung weiter fort. Um dies zu erreichen, bedarf es großer Behutsamkeit. Zur Erleichterung des Experiments schneide ich aus einem quadratischen, 4 cm breiten Kartonblatt, senkrecht zu dessen einem Rand, ein keilförmiges Stück von 1 cm Länge heraus. Dann lege ich das Blatt so auf den Tisch, daß die Schlitzstelle frei über dessen Rand hervorragt. Nun wird die Pinzette mit dem erfassungshypnotischen Tier vorsichtig aus dem Stativ genommen und langsam um 180° gedreht, sodaß das Tier nun mit dem Rücken nach abwärts gekehrt ist. Ich bringe hierauf die Pinzettenenden mit dem Limnotrechus an das äußerste

Ende des Schlitzes. Nun öffne ich die Pinzette und lege im selben Augenblick das Tier zwischen die beiden Schlitzränder. — Gelingt das Experiment, so bleibt der Limnotrechus auch weiter in Ruhe. Er verhält sich dann analog einem in Rückenlage befindlichen, auf andere Weise in Hypnose versetzten Tier.

Tabelle VII.

Fortsetzung der Erfassungshypnose in freiem Zustand.

Ordnungszahl	Tier	Dauer der vorhergeh. Erfass.-Hypnose bis z. Augenblick der Endpinzettierung	Dauer der freien Hypnose	Bemerkungen
No. 58	♀	385″	538″	
No. 59	kl. Larve	—	17″	Befreiung aus der Pinzette sofort nach eingetret. Subitanhypnose.
No. 60	mittl. Larve	447″	162″	
No. 61	♂	—	552″	Befreiung aus der Pinzette sofort nach eingetret. Subitanhypnose
No. 62	♂	3535″	450″	
No. 63	♀	—	1110″	Befreiung aus der Pinzette sofort nach eingetret. Subitanhypnose
No. 64	♀	—	71″	Befreiung aus der Pinzette sofort nach eingetret. Subitanhypnose. Auflegen auf Watte
No. 65	♀	—	122″	Befreiung aus der Pinzette sofort nach eingetret. Subitanhypnose. Auflegen auf Watte

Daß man statt eines Kartonblattes eine ähnlich hergerichtete Wattelage nehmen kann, bedarf wohl ebensowenig wie die vorstehende Tabelle einer Erläuterung.

Die Copulahypnose und die Freßhypnose.

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir bereits für Limnotrechus eine in freier Natur vorkommende Hypnose (Einschleich-

hypnose) kennen gelernt. Zweifellos gehört sie zur Gruppe der Berührungshypnosen, wie ich sie auch experimentell bei Blatta und Tomocerus durch Kriechenlassen in Watte erzeugen konnte. Bei der Einschleichhypnose vertreten die feinen Körperhärchen die bei obigen Formen wirksamen Wattefasern. In zwei andern freien Hypnosen handelt es sich hingegen um viel gröbere Reize. In beiden Fällen bildet die Erfassung das auslösende Moment. Die eine der beiden Hypnosen findet sich als Begleiterscheinung der Copula. In letzterer springt das kleine, schmächtige Männchen auf den Rücken des Weibchens und umklammert mit seinen Vorderbeinen dessen Prothorax. Gleichzeitig stülpt sich sein langer Penis aus dem Hinterleib, der sich rechtwinklig nach abwärts und dann terminal wieder nach aufwärts biegt, um zwischen die Klappen der weiblichen Genitalöffnung einzutreten. Gelingt der Sprung, so erfolgt beim Weibchen kaum eine Abwehrreaktion — höchstens eine kurze Reflexbewegung. Mißlingt er, was häufig der Fall ist, so kommt es zwischen den Geschlechtstieren geradezu zu Kämpfen, wobei beide Individuen sich aneinander aufrichten und mit ihren Extremitäten bearbeiten. Manchmal gelingt es dem Männchen auch dann noch, des Weibchens Herr zu werden und den Rückensitz einzunehmen.

Bei der Copula tritt nun zweifellos bei beiden Geschlechtstieren Hypnose ein, wobei anfangs das Männchen den tieferen Grad zeigt. Ist dessen Sprung nicht gleich gelungen, oder ist das Weibchen zum Geschlechtsakt nicht völlig disponiert, so besitzt letzteres anfangs noch eine gewisse Beweglichkeit. Es reagiert noch auf Reize, allerdings schwächer wie normal, kann sich auf der Wasserfläche etwas bewegen und vermag sich auch gelegentlich noch zu putzen. Diese Reaktionsfähigkeit findet aber meist nach wenigen Minuten ihr Ende. Auf dem Höhepunkt der Copula, die bis zu $^1/_2$ Stunde zu dauern vermag, bleiben Männchen wie Weibchen gegen ziemlich starke mechanische, optische und chemische Reize reaktionslos. Erfassen einer Extremität führt zu katatonischen Erscheinungen, ohne vorhergehende Zappelbewegungen. Man kann sowohl das Männchen wie das Weibchen am Bein erfassen und das Paar in beliebige Lage drehen. Ja es gelingt sogar, das Männchen auf festem Substrat auf den Rücken zu legen, sodaß die Beine des umfaßten Weibchens frei in die Luft ragen, ohne daß Umkehrreaktion erfolgt. Weiterhin besteht Analgesie: Amputationen von Beinstücken werden reaktionslos ertragen.

Suchen wir nach engeren Parallelen der Copulahypnose zu den von uns studierten Zuständen, so dürfte das copulierte Weibchen

einem pinzettierten Tier entsprechen, dessen Extremitäten in Beziehung zu einem Körper stehen. Wie dort können anfangs noch Reaktionen vorhanden sein, wenn die Erfassung nicht zu einer Subitanhypnose geführt hat.

Weniger durchsichtig liegen die Verhältnisse beim copulierenden Männchen, und doch sind auch hier die Vergleichsmomente leicht aufzufinden.

Für das Männchen handelt es sich zwar nicht um ein Erfaßtwerden, sondern um ein Erfassen. Dennoch dürfte Beides auf dasselbe herauskommen, weil im Grunde genommen ja nicht das Erfaßtwerden als solches das zur Hypnose führende wirksame Agens ist, sondern der spezifische Berührungsreiz, den die Erfassung auslöst. Derselbe ist aber ebenso groß für das erfassende Tier wie für das erfaßte, da dem aktiven Berührungsdruck ein passiver Berührungswiderstand gegenübersteht.

Unabhängig von dieser Betrachtung ist die Frage nach der Ursache für den Klammerreflex und sein Weiterbestehen.

Zweifellos würde übrigens die Hypnose auch dann noch eine Zeit lang fortdauern, wenn dieser Reflex bereits nach Eintritt der Hypnose aufhörte.

Außer dem passiven und aktiven Erfassungsreiz kommt für die Hypnose der beiden Geschlechtstiere noch der durch das Aufeinanderliegen beider Körper erzeugte Berührungsreiz in Betracht. Er dürfte im Sinne einer Hypnoseverlängerung wirken[1].

Die dritte Kategorie freier Hypnosen, die ich bei Limnotrechus beobachtet habe, findet sich beim Freßakt. Nach Kenntnis meiner Untersuchungsresultate über die Erfassung war sie hier ebenso zu erwarten wie bei der Copula, denn auch bei der Nahrungsaufnahme spielt der Klammerreflex eine wichtige Rolle. Auch hier springt Limnotrechus auf den Rücken eines andern Tieres und umklammert mit seinen Vorderbeinen dessen Körper. Bei Fehlen von Beutetieren anderer Art, wie es regelmäßig in meinen Glaszwingern der Fall war, herrscht stets Kannibalismus. In diesem Fall kann ein Freßakt geradezu eine Copula vortäuschen. Der Räuber umklammert alsdann das Opfer in ganz ähnlicher Weise wie dort das männliche Tier das Weibchen, nur daß er gleichzeitig

1) Außer dem hier erwähnten Beispiel ist bisher nur ein einziger Fall im Tierreich bekannt geworden, wo die Hypnose bei der Copula eine Rolle spielt, nämlich für die Solifuge Galeodes caspius turkestanus (nach Heymons). Aus Raummangel kann an dieser Stelle nicht näher auf die interessante Tatsache eingegangen werden.

seinen Rüssel in dessen Körper einführt. Mit diesem Vorgang verbunden ist für beide Partner ein Zustand der Akinese, der — wenigstens für den Räuber — durchaus mit jenem des männlichen Copulanden übereinstimmt. Ich brauche deshalb die betreffenden Symptome auch nicht noch einmal zu schildern.

Es ist nun aber der Klammerreflex nicht allein, welcher die eigentümliche Erstarrung auslöst. Eine bedeutsame Rolle dürfte auch die Einführung des Rüssels in das Beutetier spielen. Dies schließe ich aus folgenden Erfahrungen: Nicht immer nährt sich Limnotrechus von lebenden Tieren. Einige Tage nach dem Einfangen, wenn sich in meinen Glaszwingern die Leichen der Ermordeten stark vermehrt hatten, sah ich in vielen Fällen die Limnotrechen zu letzteren zurückkehren und an ihnen saugen. Manchmal waren es zwei bis drei Tiere, die ihre Rüssel gemeinschaftlich in ein schon längst verendetes Tier einbohrten. Hierbei sah ich, wie sie oft eine Viertelstunde lang an dem Kadaver herumzüngelten, bis sie eine passende Stelle zum Einstich gefunden hatten. Mit Vorliebe handelte es sich um Gelenkstellen, z. B. die Segmentgrenzen an den Beinen, während bei der lebenden Beute fast immer der Rüssel in die Rückendecke gestochen wurde. Entsprechend dem stärkeren Impuls wurde hier das größere Hindernis leichter bewältigt. Bei diesen Aasfressern nun — und hier komme ich auf den Punkt, der von besonderem Interesse ist — erfolgt häufig gar keine regelrechte Umklammerung der liegenden Beute mehr. In einem Fall z. B. wurde der Kadaver nur mit dem rechten Vorderbein umfaßt; im andern Fall geschah nicht einmal dies, die Berührung war nur eine ganz oberflächliche. Und doch erfolgte stets, sowie der Rüssel in den Körper eingetreten war, die Erstarrung. Dies scheint etwas ganz anderes zu sein, als eine Erfassungshypnose, und doch kann es sich nur um eine solche handeln. Der Druck, den das den Rüssel umgebende Chitin und die Gewebsmassen ausüben [1]), muß ja genau so wirksam sein, wie die Erfassung eines schmalen Beinstückchens durch eine feine Pinzette. Die Umklammerung des lebenden Beutetieres ist deshalb nicht ohne Bedeutung. Sie bewirkt, daß es in momentaner Erstarrung dem Einstich des Rüssels in seinen Körper keinen Widerstand entgegensetzt [2]). Mehrfach gelang es mir, 1—3 Tiere,

1) Er ist so groß, daß beim Emporheben des freßhypnotischen Tieres die die allein von dessen Rüssel gehaltene Beute ihm nachfolgt.

2) Daß bei der Einführung des Rüssels in das Beutetier auch ein Giftstoff in dessen Körper gebracht wird, konnte ich in mehreren Fällen nachweisen. Eine Beobachtung war besonders charakteristisch: Ein mittelgroßes Individuum wurde

die den Rüssel in denselben Kadaver eingesenkt hatten, auf den Rücken zu legen. ohne daß hierbei ihre Hypnose ein Ende erlangt hätte. (In meiner nächsten Publikation werde ich Photogramme hiervon geben.) Was die Dauer solcher Hypnosen anbelangt. so währte sie in mehreren Fällen, wo ich den Räuber auf den Rücken gelegt hatte. so daß seine Beute über ihm lag, mehr als eine Stunde. Nach Entfernung des Rüssels aus dem Kadaver erfolgt auch hier stets ein kurzes Somnolenzstadium.

Die Resultate dieser und meiner vorhergehenden Arbeit ergeben. wie ich glaube. nicht uninteressante Einblicke in die Rolle des Berührungsreizes. Die nahe Beziehung, welche er zur tierischen Hypnose unterhält, lassen erwarten, daß der letzteren eine weit größere biologische Rolle zukommt, als man ihr bis heute eingeräumt hat. Bei allen jenen vielen niederen Organismen, deren Verhalten im Wesentlichen durch den Tastsinn determiniert wird, dürfte die t. Hypnose ein konstantes Vorkommen haben. Aber mehr noch, es wird sich hier zeigen lassen. daß sie keine abrupt im biologischen Geschehen der Tiere auftretende Erscheinung darstellt. sondern daß zu ihr eine allmähliche Stufenfolge von Reaktionen hinführt. Diese Fragen hoffe ich demnächst in einer weiteren Publikation über reflexbiologische Vorgänge bei Insekten des Näheren auszuführen.

von einem großen Limnotrechus überfallen. Der Sprung mißglückte. Trotzdem gelang es dem Räuber, sein Opfer von hinten festzuhalten und seinen Rüssel — ein seltenes Vorkommen, wenn das Beutetier lebt — in das Femur-Tibialgelenk einzusenken. Nach etwa einer Minute entfernte sich der Räuber von seinem Opfer. Trotz der belanglosen Verletzung war das Tier wie gelähmt und konnte sich kaum etwas vorwärts schleppen. Es dürfte wohl nicht zu gewagt sein, aus diesem Verhalten auf ein schnell wirkendes Gift zu schließen.

Quarz als geologisches Thermometer und die Bedeutung der Zusammensetzungsflächen von Kristallzwillingen.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Juni 1921.

Der oberhalb 575° entstandene trapezoedrisch-hemiedrische (hexagonal-trapezoedrische) β-Quarz erfährt (fast ohne Änderung der geometrischen Constanten und bei gleich gerichteten dreizähligen und zweizähligen Axen) bei 575° einen Zerfall in zwei trapezoedrisch-tetartoedrische (trigonal-trapezoedrische) Individuen von α-Quarz, die in Zwillingsstellung nach $(10\bar{1}0)$ stehen und sich im Allgemeinen unregelmäßig gegeneinander abgrenzen[1]. Nicht nach diesem Gesetz verzwillingte Quarze sind daher im Allgemeinen unterhalb 575° entstanden[2], aber auch danach verzwillingte dann, wenn die Zwillingsbildung schon während des Wachstums stattgefunden hat; trapezoedrisch-hemiedr. β-Quarz kann sich nach obigem Gesetz nicht verzwillingen.

Dafür, daß α-Quarz als Zwilling gewachsen ist, gibt es einige Merkmale. Trägt der Quarz die sog. Parallelogramm- oder Trapezflächen, die an alpinen Bergkristallen stets (aber auch an den meisten andern Vorkommen) nur unterhalb dem positiven Grundrhomboeder auftreten, so darf die in Folge natürlicher oder künstlicher Ätzung genau erkennbare Zwillingsgrenze an keiner Stelle jene Flächen überqueren, da sonst eine solche Fläche am Zwillingsteil unterhalb einer negativen Rhomboederfläche zu liegen käme, was dort nie beobachtet ist. An zahlreichen Bergkristallen aus dem Tavetsch, dem Hollersbachtal in Salzburg, ebenso aus Drusen des roten Granits von Baveno, die aus schriftgranitähnlichem Gestein herausgewachsen sind, ferner an einem Kristall von Zinnwald verliefen in der Tat die Zwillingsgrenzen, auch nach Maß-

1) O. M. Neues Jahrb. f. Min. Festbd. 1907, 181.

2) Ob und unter welchen Umständen ein Übergang von β- in α-Quarz stattfinden kann ohne Zerfall in zwei Individuen, ist nicht bekannt.

gabe mikroskopischer Untersuchung so wie obige Regel es verlangt. Man kann daher mit Sicherheit annehmen, daß die Kristalle aller dieser Vorkommen unterhalb 575° gebildet sind. obwohl ihre Zwillingsgrenzen im Allgemeinen durchaus unregelmäßig verlaufen. vielfach sehr verwickelt sind. Letzteres ist also nicht. wie Wright und Larsen[1]) und nach ihnen Andere meinten, ein Kennzeichen für Bildung oberhalb 575°, als *β*-Quarz.

Ein weiteres Merkmal der Bildung unterhalb 575°, also als *α*-Quarz. scheint durch die Verteilung und das Größenverhältnis der Flächen des positiven und negativen Grundrhomboeders gegeben, wenn nämlich große (positive) und kleinere (negative) regelmäßig miteinander abwechseln. Derart sind z. B. gewisse Kristalle von den Erzlagerstätten von Schemnitz (Ungarn). Man wird geneigt sein, diese Kristalle als nicht verzwillingt anzusehen: die Ätzung zeigt aber. daß selbst jene Kristalle an denen Flächen von der Lage des negativen Grundrhomboeders nur sehr klein im Verhältnis zum positiven entwickelt sind. doch nicht ganz einfach sind. sondern in der Nähe der durch die kleine Rhomboederfläche abgestumpften Ecke kleine Teile in Zwillingsstellung tragen, die sich aber zum Unterschied von den obigen alpinen und Bavenoer Kristallen im Allgemeinen längs einfachen, meist annähernd // der Säule erster Ordnung verlaufenden Flächen vom Hauptteil abgrenzen. Auffallend ist bei Kristallen dieses Vorkommens gegenüber den oben genannten auch die verhältnismäßige Häufigkeit von sog. Juxtapositionszwillingen die aus zwei nahezu gleich großen, und wesentlich längs der Säule erster Ordnung sich abgrenzenden Individuen bestehen.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich folgender. wie man sieht nicht in jedem Falle ausreichende Schlüssel zur Bestimmung der Entstehungstemperatur von Quarzkristallen:

I. Ohne Zwillingsteile (nach $(10\bar{1}0)$): $t < 575^0$.

II. Mit Zwillingsteilen:

- a) mit Trapez- oder Parallelogrammflächen
  - *α*) Verteilung und Verlauf der Trapez- und Parallelogrammflächen conform den Zwillingsgrenzen: $t < 575^0$.
  - *β*) Verteilung usw. nicht conform: $t > 575^0$ (bisher nicht beobachtet).
- b) Ohne Trapez- usw. Flächen.
  - *α*) Regelmäßige Kombination von positivem und negativem Rhomboeder

1) Wright und Larsen, Amer. Journ. of sc. **27**, 421, 1909.

1. Grenzen regelmäßig: $t < 575^0$.
2. Grenzen unregelmäßig: sehr wahrscheinlich $t < 575^0$.

β) Endflächen hexagonale Pyramide bildend oder unregelmäßig in der Größe

1. Grenzen unregelmäßig: $t \gtrless 575^0$.
2. Grenzen regelmäßig: wahrscheinlich $t < 575^0$.

Die in der Grenzfläche zweier verzwillingter Kristalle liegenden Teilchen werden (ähnlich wie die in ihrer Oberfläche) etwas andere Eigenschaften haben als die im Innern, rings von andern gleich orientierten umgebenen. Bei dem Zerfall des β-Quarzes in einen Zwilling von α-Quarz ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der einen oder anderen Orientierung für jedes seiner Teilchen im Innern ganz gleich, soweit die Struktur des β-Quarzes selbst in Frage kommt; die Entscheidung zwischen beiden muß für jedes Teilchen durch äußere Kräfte bewirkt werden, z. B. Spannungen die infolge nicht ganz modellartiger Ausbildung der Kristalle bei Temperaturänderung oder infolge von Bewegungen in der Nähe des Kristalls (z. B. im Magma) sich einstellen. Da sie von außen kommen, werden sie im Innern des Kristalls im Allgemeinen zusammentreffen, können sich hier also an geeigneten Stellen aufheben oder so schwach werden, daß hier (meist wohl nur sehr kleine) Partien des β-Quarzes auch unterhalb 575° erhalten bleiben. Sie erscheinen dann wegen ihrer Schmalheit als Grenzflächen der beiden in Zwillingsstellung befindlichen umgewandelten Teile des α-Quarzes, deren Verbindung sie vermitteln; derartige Grenzflächen kann man als Zusammensetzungsflächen bezeichnen. Wo keine solche Teilchen von β-Quarz zwischen zwillingsmäßig orientierten von α-Quarz erhalten geblieben sind, sind letztere nicht verbunden, können sogar durch Sprünge getrennt sein.

Nimmt man der Einfachheit halber an, daß die Zusammensetzungs„fläche" nur die Dicke eines Teilchens von β-Quarz hat, und bezeichnet man die beiden Orientierungen von (rechtem) α-Quarz mit r und $\underline{r}$, für ein Teilchen von β-Quarz dagegen mit $r\underline{r}$, so kann man die Anordnung für eine Richtung quer zur Zusammensetzungsfläche etwa durch folgendes Schema andeuten:

$r \,.\, r \,.\, — — — — r \,.\, r\underline{r}. \quad \underline{r}. — — — — \underline{r}$

Je nachdem die Zusammensetzungsfläche nur eine Schicht von β-Quarz enthält oder mehrere, aber auch je nachdem die Zwillingsteile an Größe gleich oder ungleich und die Zusammensetzungsfläche eben oder verwickelt ist, wird die Zahl der Teilchen von

β-Quarz, die der Umwandlung entgangen sind, kleiner oder größer sein, aber im Allgemeinen wird ihre Zahl verschwinden gegenüber der Zahl der umgewandelten, so lange die Zusammensetzungsfläche in allen Durchschnitten noch als Linie erscheint und zugleich die einzelnen Grenzlinien makro- und mikroskopisch noch zu trennen sind [1]).

Zwillingsteilchen, wie sie hier für die Zusammensetzungsfläche der durch Zerfall von β-Quarz entstandenen Zwillinge von α-Quarz vorausgesetzt sind, werden, wie früher [2]) dargelegt wurde, vermutlich auch in solchen Nährlösungen von Kristallen vorhanden sein (neben sehr viel zahlreicheren einfachen Teilchen) die neben einfachen Kristallen einer bestimmten Art auch Zwillingskristalle derselben Art oder nur solche ausscheiden. Ist der Gehalt an solchen Zwillingsteilchen verhältnismäßig groß, so können (das Größenverhältnis beider Individuen einmal als konstant angenommen) statt der kleinstmöglichen (stets ebenen) Zusammensetzungsfläche verwickelte und dadurch weit ausgedehnte erscheinen wie oben in den Bergkristallen der Alpen; ist der Gehalt an Zwillingsteilchen nur sehr klein, so werden sie nur zur Besetzung der Zusammensetzungsfläche eines kleinen Zwillingsstückes und zwar einer ebenen ausreichen, wie oben in den Kristallen von Schemnitz; bei letzteren muß die Wahrscheinlichkeit für die Ausbildung sog. Juxtapositionszwillinge dann besonders groß werden, wenn der Kristall schon sehr früh ein Zwillingsteilchen anlagerte (fast als Zwillingskeim begann).

Da das Verhältnis zwischen der Zahl der zur Besetzung einer ebenen Zusammensetzungsfläche nötigen Zwillingsteilchen zur Zahl der überhaupt zum Aufbau des Zwillings verwandten mit der Größe (Gewicht) des Kristalls abnimmt, wird die Wahrscheinlichkeit für eine verwickelte Gestaltung der Zusammensetzungsfläche mit der Größe des Kristalls zunehmen. Das Verhältnis zwischen den verbrauchten Zwillings- und Einzelteilchen wird dagegen gleich bleiben, wenn das Wachstum lediglich nach der Zusammensetzungsfläche geschieht, d. h. der Zwilling nach dieser Fläche sich nicht verdickt, sondern taflig wird, was ja auch vielfach beobachtet ist.

Einer Zunahme des Gehaltes an Zwillingsteilchen in der Lösung beim Wachstum des Kristalls kann auch begegnet werden

1) Wird der Gehalt an Zwillingsteilchen (z. B. infolge fortgesetzter einfacher Schiebungen nach Gleitflächen) ein sehr großer, so werden die Eigenschaften der Kristalle andere (Beeinflussung der Konstanten von Metallen durch mechanische Bearbeitung, Bildung der „Zwischensubstanz“ der Metallographen).

2) O. M. Fortschr. d. Min 1, 64, 1911.

durch die Bildung neuer, der ersten parallelen (oder anderer ihr gleichwertiger) Zusammensetzungsflächen; dann entstehen polysynthetische (oder wirtelförmig gebaute usw.) Zwillinge, ihre Bildung setzt also nicht etwa einen besonderen Anlaß für die periodische Vermehrung des Gehaltes an Zwillingsteilchen voraus. Liegen in beiden Individuen zahlreiche rationale Flächen einander parallel wie bei den Ergänzungszwillingen, so wird es zum Beginn einer neuen Zusammensetzungsfläche voraussichtlich eines besonders geringfügigen Anstoßes bedürfen, die Zusammensetzungsfläche wird sich also häufiger als bei anderen Zwillingen ändern, die beiden Individuen werden sich unregelmäßig durchdringen wie in den alpinen Quarzen. Da die Wahrscheinlichkeit Zwillingsteilchen anzulagern mit der Zahl der überhaupt angelagerten Teilchen zunimmt, wird man unter den kleinen Kristallen eher einfache antreffen als unter den großen, Zwillingskristalle werden also ceteris paribus größer sein als einfache.

Wird durch irgendwelche Umstände, z. B. Änderung der Temperatur, der Gehalt der Nährlösung an Zwillingsteilchen so stark herabgesetzt, (indem diese in der Lösung „dissoziieren“), daß die bis dahin mit dem Wachstum des Kristalls sich erweiternde Grenzfläche der beiden Individuen nicht mehr überall besetzt werden kann, so werden beide Individuen an solchen Stellen zusammenstoßen, ohne daß es zu einer Verbindung beider kommt; es können sichtbare und mehr noch unsichtbare Lücken im Kristallbau bleiben, die allerlei Störungen in optischer Hinsicht, beim Ätzen, Spalten, hinsichtlich der Dichte u. a. nach sich ziehen. Reicht der Gehalt der Nährlösung an Zwillingsteilchen nur zur Bildung eines ganz kleinen Zwillingsstückes aus, so wird sich dieses auch mit möglichst kleiner, also ebener Zusammensetzungsfläche abgrenzen und sich da ansetzen müssen, oder richtiger nur da bei längerem Wachstum erhalten bleiben, wo es dieselben Flächen gegen die Lösung entwickeln kann, die durch ihr Vorhandensein am Hauptteil ihre Beständigkeit gegenüber der Lösung bezeugen. So ist es an den Kristallen von Schemnitz, wo die beständigen Formen $(10\bar{1}0)$ und $(10\bar{1}1)$ sind und $(10\bar{1}1)$ in dem Zwillingsteil daher an der Stelle liegen muß, wo am Hauptteil $(01\bar{1}1)$ auftreten würde. In der Tat ist bei den Schemnitzer Kristallen die von $(01\bar{1}1)$ abgestumpfte Ecke stets die Stelle, wo das Zwillingsstückchen liegt.

Welche Umstände den Gehalt einer Lösung an Zwillingsteilchen bestimmen, ist nicht bekannt. In der Nährlösung mimetischer Kristalle wird man einen besonders hohen Gehalt voraussetzen dürfen, denn hier scheint es öfter von der Vorbehandlung der Lö-

sung abzuhängen, ob sich die niedriger symmetrische Modifikation in mimetischen Kristallen ausscheidet oder die wahrhaft höher symmetrische; damit stimmt ja auch die Häufigkeit und Kompliziertheit ihrer Zwillingsbildung.

Auf die Verwachsungen von rechten Kristallen mit linken derselben Art, ebenso auf die regelmäßigen Verwachsungen von Kristallen verschiedener Art kann man diese Betrachtungen übertragen, indem man bei der Kristallisation der ersteren in ihren Lösungen „razemische" Teilchen voraussetzt, bei der Bildung der letzteren das Vorhandensein von Teilchen einer chemischen Verbindung der beiden Komponenten; wo letztere in selbständigen Kristallen vorkommt, wären also gewisse Beziehungen zu den Formen der Komponenten zu erwarten, die auch die gegenseitige Stellung der Komponenten beeinflussen würden.

Eine Ergänzung zu dem Bernoullischen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Vorgelegt von C. Runge in der Sitzung am 28. Oktober 1921.

Den Satz von Jacob Bernoulli kann man etwas ungenau so aussprechen: Es ist als abnormal anzusehn, wenn eine lange Versuchsreihe am Ende nicht eine Häufigkeit ergibt, die der Wahrscheinlichkeit sehr nahe kommt. Nicht zu verwechseln ist dieser Satz mit dem folgenden, etwas mehr besagenden Satz, der, obzwar ebenso plausibel und der Gedankenrichtung der Anwendungen vielleicht noch näherstehend, trotzdem, wie es scheint, in diesen Zeilen zuerst bewiesen sein wird: Es ist als abnormal anzusehn, wenn eine lange Versuchsreihe von einem gewissen Versuch an nicht stets Häufigkeiten ergibt, die der Wahrscheinlichkeit sehr nahe kommen.

Die genaue Formulierung der beiden Sätze folgt sofort, vgl. insbesondere die Formeln (2) und (3). Diese Formeln beziehen sich übrigens auf einen etwas allgemeineren Fall. Ich hätte eine noch viel allgemeinere Formulierung mit denselben Mitteln beweisen können, wenn ich nicht die Deutlichkeit einer bloß äußerlichen Allgemeinheit vorgezogen hätte.

1. In einer Urne befinden sich k Kugeln. Jede Kugel hat einen bestimmten „Wert", einen der folgenden l Werte: $y_1, y_2, \dots y_l$. (Man kann sich denken, daß auf jede Kugel ihr Wert angeschrieben ist.) Es gibt $k_1, k_2, \dots k_{l-1}$ bzw. k_l Kugeln von dem Wert $y_1, y_2, \dots y_{l-1}$ bzw. y_l. Es ist

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_l = k.$$

Die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne mit einmaliger Ziehung eine Kugel vom Wert y_λ zu ziehen, sei p_λ. Es ist

$$p_1 = \frac{k_1}{k}, \quad p_2 = \frac{k_2}{k}, \quad \dots, \quad p_l = \frac{k_l}{k}$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_l = 1.$$

Den Durchschnittswert der Kugeln in der Urne bezeichne ich mit $\langle y \rangle$. Es ist

(1) $$\langle y \rangle = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_l y_l.$$

Es wird aus der Urne wiederholt gezogen, indem jede gezogene Kugel vor dem neuen Zug zurückgeworfen wird, um die Zusammensetzung der Urne konstant zu erhalten. Den Wert der Kugel, die mit dem 1-sten, 2-ten, ... n-ten, ... Zuge erscheint, bezeichne ich bzw. mit $y', y'', \ldots y^{(n)}, \ldots$. Man könnte $y', y'', \ldots y^{(n)}, \ldots$ „von dem Zufall abhängige Größen" nennen. Denn ob der Wert y' zu y_1 zu $y_2, \ldots$ oder zu y_l ausfällt, hängt vom Resultat der ersten Ziehung ab. Ähnlich steht es mit $y'', y''' \ldots$.

Ich betrachte verschiedene Wahrscheinlichkeiten in Zusammenhang mit den beschriebenen wiederholten Ziehungen.

$W_n(a, b)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß der Gesamtwert der ersten n gezogenen Kugeln zwischen a und b enthalten ist. M. a. W. $W_n(a, b)$ ist die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$a < y' + y'' + \cdots + y^{(n)} < b.$$

$\Omega_n(\varphi(x), \psi(x))$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß der Gesamtwert der ersten x gezogenen Kugeln zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ enthalten ist, für alle Ziehungzahlen x von der n-ten Ziehung ab. M. a. W. $\Omega_n(\varphi(x), \psi(x))$ ist die Wahrscheinlichkeit für das simultane Bestehen der unendlich vielen Ungleichungen

$$\varphi(x) < y' + y'' + y''' + \cdots + y^{(x)} < \psi(x)$$

für $x = n, n+1, n+2, n+3, \ldots$.

$W_n(a, b)$ bezieht sich auf eine aus n Zügen bestehende endliche Ziehungsreihe. $\Omega_n(\varphi(x), \psi(x))$ bezieht sich auf eine ins Unendliche verlängerte Ziehungsreihe, u. zw. auf eine Eigenschaft davon, die wir von der n-ten Ziehung an zu prüfen beginnen. Es ist

$$W_n(\varphi(n), \psi(n)) \geqq \Omega_n(\varphi(x), \psi(x)).$$

Es sei ε eine feste positive Zahl, $\varepsilon > 0$. Eine Verallgemeinerung des Bernoullischen Satzes, der von Laplace[1]) und Tschebyschef[2]) herrührt (bzw. in deren allgemeineren Entwicklungen enthalten ist), besagt, daß

(2) $$\lim_{n=\infty} W_n((\langle y \rangle - \varepsilon)n, (\langle y \rangle + \varepsilon)n) = 1.$$

---

1) Laplace, Théorie analytique des probabilités. Livre II, Chap. IX, no. 39.

2) Tschebyschef, Oeuvres I, S. 687—694.

Ich beweise im folgenden, daß

(3) $$\lim_{n=\infty} \Omega_n(((y)-\varepsilon)x, ((y)+\varepsilon)x = 1)$$

bzw. den schärferen Satz, daß wenn λ fest und $\lambda > \frac{1}{2}$

(4) $$\lim_{n=\infty} \Omega_n(\langle y\rangle x - x^\lambda, \langle y\rangle x + x^\lambda) = 1.$$

Der Satz von Jacob Bernoulli bezieht sich auf den Fall, wenn in der Urne bloß zwei Arten von Kugeln sich befinden ($l = 2$), etwa von den Werten $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ und besagt das Bestehen von (2) in diesem speziellen Falle. Ob in diesem Bernoullischen Fall nicht nur (2), sondern auch das schärfere (3) gilt, diese Frage hat mir Herr Paul Hertz vorgelegt. Die Frage ist durch verschiedene philosophische Erörterungen über den Wahrscheinlichkeitsbegriff nahegelegt; ja, alle Schriftsteller, die die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der Häufigkeiten definiert haben wollen, präsupponieren gewissermaßen mit mehr oder weniger Klarheit nicht nur das Bestehen des Bernoullischen Satzes (2), sondern auch das des schärferen Satzes (3). Nachdem ich die Frage von Herrn Hertz bejahend gelöst und die Antwort an Herrn Pierre Cérésole mitgeteilt habe, erwiderte er mir, daß er auch einen analogen Satz bewiesen hat (in den jetzigen Bezeichnungen denjenigen Spezialfall von (3), in dem $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = 1/l$). In der mathematischen Literatur scheint der Gegenstand bisher nicht erwähnt zu sein. — Die Fragestellung ist einer übersichtlichen geometrischen Formulierung[1]) und weitgehender Verallgemeinerungen fähig, worauf ich hier nicht näher eingehen will.

2. Es sei λ fest gewählt, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. Mit P_n bezeichne ich die Wahrscheinlichkeit, daß die Ungleichung

(5) $$-n^\lambda < y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle < n^\lambda$$

nicht besteht. Mit P_{n+1} bezeichne ich die Wahrscheinlichkeit, daß die Ungleichung (5) besteht, jedoch die Ungleichung

(5′) $$-(n+1)^\lambda < y' + y'' + \cdots + y^{(n)} + y^{(n+1)} - (n+1)\langle y\rangle < (n+1)^\lambda$$

nicht besteht. Mit P_{n+2} bezeichne ich die Wahrscheinlichkeit, daß (5) (5′) wohl bestehen, jedoch

(5″) $$-(n+2)^\lambda < y' + y'' + \cdots + y^{(n+2)} - (n+2)\langle y\rangle < (n+2)^\lambda$$

nicht besteht usw. P_{n+m} wird definiert als die Wahrscheinlich-

1) Vgl. Pólya, Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. Bd. 52, S. 57—65.

keit für das Bestehen von m analogen Ungleichungen und für das Nichtbestehen einer. $P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ sind Wahrscheinlichkeiten für unverträgliche, disjunktive Ereignisse. Nach Definition ist einerseits

$$1 - \Omega_n(\langle y\rangle x - x^\lambda, \langle y\rangle x + x^\lambda) = P_n + P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots$$

andererseits

$$P_\nu \leqq 1 - W_\nu(\langle y\rangle \nu - \nu^\lambda, \langle y\rangle \nu + \nu^\lambda) \quad (\nu = n,\ n+1,\ n+2, \ldots).$$

Folglich ist

$$(6)\ 1 - \Omega_n(\langle y\rangle x - x^\lambda, \langle y\rangle x + x^\lambda) \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} \{1 - W_\nu(\langle y\rangle \nu - \nu^\lambda, \langle y\rangle \nu + \nu^\lambda)\}.$$

3. Die mathematische Erwartung einer von dem Zufall abhängigen Größe Y will ich im folgenden mit $\langle Y\rangle$ bezeichnen. Diese Bezeichnung ist im Einklang mit Formel (1). Dieser Bezeichnung gemäß ist

$$(7) \qquad \langle (y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle)^{2k}\rangle$$

$$= \sum_{\nu_1=1}^{l} \sum_{\nu_2=1}^{l} \cdots \sum_{\nu_n=1}^{l} (y_{\nu_1} + y_{\nu_2} + \cdots + y_n - n\langle y\rangle)^{2k} p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n}.$$

(k sei eine positive ganze Zahl). Ich zerlege die Summe rechter Hand in zwei Teile; $\sum^{\mathrm{I}}$ soll diejenigen Glieder umfassen, für welche

$$-n^\lambda < y_{\nu_1} + y_{\nu_2} + \cdots + y_{\nu_n} - n\langle y\rangle < +n^\lambda,$$

$\sum^{\mathrm{II}}$ die übrigen. Gemäß Definition (vgl. unter 1) ist

$$\sum\nolimits^{\mathrm{I}} p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n} = W_n(n\langle y\rangle - n^\lambda, n\langle y\rangle + n^\lambda)$$

$$\sum\nolimits^{\mathrm{II}} p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n} = 1 - W_n(n\langle y\rangle - n^\lambda, n\langle y\rangle + n^\lambda).$$

Es ist

$$\begin{aligned} &\langle (y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle)^{2k}\rangle \\ &= \left(\sum\nolimits^{\mathrm{I}} + \sum\nolimits^{\mathrm{II}}\right)(y_{\nu_1} + y_{\nu_2} + \cdots + y_{\nu_n} - n\langle y\rangle)^{2k} p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n} \\ &\geqq \sum\nolimits^{\mathrm{II}} (y_{\nu_1} + y_{\nu_2} + \cdots + y_{\nu_n} - n\langle y\rangle)^{2k} p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n} \\ &\geqq \sum\nolimits^{\mathrm{II}} (n^\lambda)^{2k} p_{\nu_1} p_{\nu_2} \cdots p_{\nu_n} \\ &= n^{2k\lambda}(1 - W_n(n\langle y\rangle - n^\lambda, n\langle y\rangle + n^\lambda)). \end{aligned}$$

Merken wir uns die Ungleichung[1])

$$(8)\ 1 - W_n(n\langle y\rangle - n^\lambda, n\langle y\rangle + n^\lambda) \leqq n^{-2k\lambda}\langle (y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle)^{2k}\rangle.$$

1) Vgl. Tschebyscheff a. a. O.

4. Die mathematische Erwartung (7) läßt sich mit Vorteil als Entwicklungskoeffizient einer nach Potenzen einer Unbestimmten u fortschreitenden Reihe auffassen. Es ist, wie bekannt,

$$(9) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle (y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle)^k \rangle u^k}{k!}$$

$$= \langle e^{(y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle)u} \rangle$$

$$= \langle e^{(y' - \langle y\rangle)u} \rangle \langle e^{(y'' - \langle y\rangle)u} \rangle \cdots \langle e^{(y^{(n)} - \langle y\rangle)u} \rangle$$

$$= \langle e^{(y - \langle y\rangle)u} \rangle^n .$$

Das „Schwankungsmaß“ σ (die mittlere quadratische Abweichung) wird durch die Formel

$$\langle (y - \langle y\rangle)^2 \rangle = \sum_{\nu=1}^{l} p_\nu (y_\nu - \langle y\rangle)^2 = \sigma^2$$

definiert. Es ist

$$(10) \qquad \langle e^{(y - \langle y\rangle)u} \rangle = \sum_{\nu=1}^{l} p_\nu e^{(y_\nu - \langle y\rangle)u}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle (y - \langle y\rangle)^k \rangle u^k}{k!} = 1 + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + u^3 \varphi(u),$$

wo $\varphi(u)$ eine ganze Funktion (stets konvergente Potenzreihe) von u ist. Man beachte, daß $\langle y - \langle y\rangle \rangle = 0$. Es ergibt sich aus (9) (10), indem man u mit $un^{-\frac{1}{2}}$ vertauscht

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle (y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle)^k \rangle u^k n^{-k/2}}{k!}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{\sigma^2 u^2}{2n} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right) \right\}^n .$$

Die rechte Seite strebt für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert

$$e^{\frac{\sigma^2 u^2}{2}} = 1 + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \cdots + \frac{\sigma^{2k} u^{2k}}{k!\, 2^k} + \cdots$$

und zwar gleichmäßig, wenn u auf irgendein endliches, abgeschlossenes Gebiet der komplexen Zahlenebene beschränkt bleibt. Es folgt daraus nach den Elementen der Funktionentheorie

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\langle (y' + y'' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y\rangle)^{2k} \rangle}{n^k} = \frac{2k!\, \sigma^{2k}}{k!\, 2^k}$$

für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

5. Ist $\lambda > \frac{1}{2}$, so bestimme man die kleinste positive ganze Zahl k, für welche

$$(2\lambda - 1)k > 1. \tag{12}$$

Ich wende (11) auf diesen Wert von k an. Da eine konvergente Folge beschränkt ist, gibt es eine Konstante C, so daß

$$\langle (y' + \cdots + y^{(n)} - n\langle y \rangle)^{2k} \rangle < n^k C \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Es folgt aus (6) (8) (13)

$$1 - \Omega_n(\langle y \rangle x - x^\lambda, \langle y \rangle x + x^\lambda) \leqq \sum_{v=n}^{\infty} v^{-2k\lambda} v^k C$$

$$= C \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{v^{(2\lambda-1)k}}.$$

Gemäß (12) ist aber diese letzte Summe das Restglied einer konvergenten Reihe und strebt als solches gegen 0 für unendlich wachsendes n, w. z. b. w.
